1. Podać przykłady takich macierzy $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, że:

   (a) $\lambda \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B) \nRightarrow \lambda + \sigma \in \sigma(A+B)$,

   (b) $\lambda \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B) \nRightarrow \lambda \cdot \sigma \in \sigma(AB)$,

   gdzie $\sigma(A)$ oznacza zbiór wartości własnych macierzy A.

2. Dla każdej z poniższych macierzy A wyznaczyć jej postać Jordana B. W każdym przypadku wyznaczyć macierz nieosobliwą P taką, że $B = PAP^{-1}$.

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Dla każdej z poniższych macierzy A wyznaczyć jej postać Jordana B oraz bazę Jordana:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$,

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,

   (e) $\begin{bmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, (f) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -3 & -4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Wykazać, jeżeli $K = \mathbb{C}$ lub $K = \mathbb{R}$, to n-ta potęga klatki Jordana rozmiaru r o wartości własnej λ jest macierzą o wyrazach a_{ji} wyrażających się wzorem

$$a_{ji} = \begin{cases} \frac{1}{(j-i)!}\frac{d^{j-i}}{d\lambda^{j-i}}\lambda^n & \text{dla } j \geqslant i, \\ 0 & \text{dla } j < i, \end{cases}$$

   gdzie $\frac{d^{j-i}}{d\lambda^{j-i}}\lambda^n$ oznacza n-tą pochodną jednomianu $W(\lambda) = \lambda^n$.

5. Wykazać twierdzenie Cayley-Hamiltona (można wykorzystać poprzednie ćwiczenie):
   Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$ oraz niech $W(t) = b_n t^n + \ldots + b_n$ będzie wielomianym charakterystycznym macierzy A. Wtedy

$$W(A) = b_n A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \ldots + b_n I = 0.$$