1. Dla wektorów $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ określamy odwzorowania:
   (a) $g_1(v, w) = 3v_1w_1 - v_2w_2$,
   (b) $g_2(v, w) = v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_1 + 2v_2w_2$,
   (c) $g_3(v, w) = v_1^2 + w_1^2$,
   (d) $g_4(v, w) = 4v_1w_1 - 2v_1w_2 - 2v_2w_1 + 3v_2w_2$.

   Które z nich określają iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}^2$?

2. Niech $A, B \in_{m\times n} (\mathbb{R})$. Określmy odwzorowanie:
$$\langle A, B\rangle = tr(A^T B).$$
   Wykazać że jest ono iloczynem skalarnym w przestrzeni $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Dla macierzy $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ zauważyć, że zachodzą nastepujące nierówności:
   (a) $\Big|tr(B)\Big|^2 \leqslant n\Big[tr(B^T B)\Big]$,
   (b) $tr(B^2) \leqslant tr(B^T B)$,
   (c) $tr(A^T B) \leqslant \frac{tr(A^T A)+tr(B^T B)}{2}$.

3. Mówimy, że w przestrzni unormowanej $X$ spełniony jest warunek równoległoboku, jeżeli dla dowolnych $u, v \in X$
$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\Big(\|u\|^2 + \|v\|^2\Big).$$
   Sprawdzić, że warunek równoległoboku jest spełniony w kazdej przestrzeni euklidesowej.

4. Niech $p \in [1, \infty), n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Wykzać, że norma $\|\cdot\|_p$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zadana wzorem
$$\| (x_1, \ldots, x_n) \|_p= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p},$$
   dla $p \neq 2$ nie pochodzi od iloczynu skalarnego (czyli nie istnieje taki iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, że $\|x\|_p = \langle x, x\rangle_p, x \in \mathbb{R}^n$).

5. Wykazać, że każda przestrzeń unormowana $X$ spełniająca regułę równoległoboku spełnia również regułę równoległościanu, tzn. dla dowolnych $u, v, w \in X$ zachodzi
$$\|u + v + w\|^2 = \|u + v\|^2 + \|v + w\|^2 + \|u + w\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2.$$

6. Udowodnić, że jeżeli norma $\|\cdot\|$ określona na przestrzeni wektorowej $X$ nad ciałem $\mathbb{R}$ spełnia warunek równoległoboku, to istnieje iloczyn sklarny $\langle\cdot,\cdot\rangle$, od którego ta norma pochodzi. Iloczyn ten można zadać wzorem
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\Big(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\Big), \quad u, v \in X.$$