1. Niech V będzie przestrzenią euklidesową oraz niech $x, y \in V$. Wykazać, że zachodzą następujące związki:
   (a) $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (tw. Pitagorasa),
   (b) $\|x+y\| = \|x-y\| \Longrightarrow x \perp y$

   .

2. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, oraz niech U, W będą jej podprzestrzeniami. Wykazać, że zachodzą następujące związki:
   (a) jeżeli $\dim V < \infty$, to $U^{\perp})^{\perp} = U$,
   (b) $U \subset W \Longrightarrow W^{\perp} \subset U^{\perp}$,
   (c) $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$,
   (d) jeżeli $\dim V < \infty$, to $V = U \oplus U^{\perp}$.

3. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym wyznaczyć bazę podprzestrzeni prostopadłej do podprzestrzeni:
   (a) $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 |\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0\}$,
   (b) $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 |\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_3 - 2x_4 = 0\}$,
   (c) $V_3 = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 |\ 2x_1 + x_2 = 0, x_2 - x_4 = 0, \sum_{i=1}^{4} x_i = 0\Big\}$.

4. Niech $\mathbb{R}_n[X]$ będzie przestrzenią wielomianów stopnia co najwyżej n o współczynnikach rzeczywistych. Niech $f, g \in \mathbb{R}_n[X]$. Ich iloczyn skalarny określamy następująco:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i, \quad \text{gdzie} \quad f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i.$$

   W przestrzeni $\mathbb{R}_2[X]$ znaleźć wielomian h równoodległy od wielomianów

$$f_1 = 3x^2 + 2x + 1,\ f_2 = -x^2 + 2x + 1,\ f_3 = 3x^2 + 2x + 5,\ f_4 = 3x^2 + 5x + 2.$$

5. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, oraz niech $u_1, \ldots, u_n$ będzie jej bazą ortonormalną. Wykazać, że dla $x, y \in V$ zachodzi zależność

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle \langle u_i, y\rangle.$$

6. Zastosować procedurę Grama-Schmidta do następującej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem sklarnym

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

7. Zastosować procedurę Grama-Schmidta do następującej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem sklarnym

   (a)
   $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (b)
   $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Posługując się algorytmem Grama-Schmidta znaleźć bazę ortonormalną podprzestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$ rozpiętej przez wektory
   $$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$
   Znaleźć bazę ortonormalną $\mathbb{R}^4$ zawierającą wektory powstałe w wyniku tego algorytmu.

9. Niech X będzie przestrzenią euklidesową, a $f : X \longrightarrow X$ endomorfizmem tej przestrzeni. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
   (a) $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, dla każdych $u, v \in X$
   (b) $\|f(u)\| = \|u\|, \ u \in X$,
   (c) $d\big(f(u), f(v)\big) = d(u, v)$.

   Endomorfizm spełniający powyższe warunki nazywamy izometrią.

10. Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią euklidesową, oraz niech $P \subset X$ będzie hiperpłaszczyzną w X (tzn. $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią). Definiujemy symetrię względem P jako jedyny endomorfizm S_P taki, że
    $$S_P|_P = \mathrm{id}_P, \quad S_P|_{P^\perp} = -\mathrm{id}_{P^\perp}.$$
    (a) Dlaczego S_P jest poprawnie określony?
    (b) Wykazać, że S_P jest izometrią.
    (c) Wykazać, że dla każdego $N \in P^\perp$ takiego, że $\|N\| = 1$ i dla każdego $u \in X$ zachodzi
    $$S_P(u) = u - 2\langle N, u\rangle N.$$