1. Wykazać, że $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ jest macierzą ortogonalną (tzn. jest macierzą izometrii w pewnych bazach ortonormalnych) wtedy i tylko wtedy, gdy A^TA=I.

2. Zauważyć, że zbiór macierzy ortogonalnych ustalonej n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej w siebie, wraz z operacją składania, tworzy grupę (oznaczamy ją przez $O_n(\mathbb{R})$).

3. Rozstrzygnąć, które z następujących macierzy są ortogonalne:

(a) $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & -20 & -15 \\ 15 & 12 & -16 \\ 20 & -9 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

4. Niech $A \in O_2(\mathbb{R})$. Wykazać, że istnieje $\phi \in \mathbb{R}$ takie, że

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix}.$$

W pierwszym przypadku otrzymujemy obrót o kąt ϕ, a w drugim symetrię względem prostej.

5. Znaleźć, w bazach kanonicznych, macierze następujących odwzorowań:

(a) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będącego symetrią względem hiperpłaszczyzny

$$H = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - x_3 + x_4 = 0\right\},$$

(b) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, będącego rzutowaniem na podprzestrzeń

$$P = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

6. Niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie ciągiem wektorów przestrzeni euklidesowej V. Wyznacznikiem Grama tych wektorów nazywamy

$$G(v_1, \ldots, v_n) = \det \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Wykazać, że

(a) wektory $v_1, \ldots, v_n$ sa liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $G(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$,

(b) $G(v_1, \ldots, v_n) \geqslant 0$,

(c) jeżeli, dla pewnego $s \in \mathbb{N}, 1 \leqslant s < n$, przestrzeń generowana przez $v_1, \ldots, v_s$ jest prostopadła do podprzestrzeni generowanej przez $v_{s+1}, \ldots, v_n$, to

$$G(v_1, \ldots, v_n) = G(v_1, \ldots, v_s) G(v_{s+1}, \ldots, v_n).$$