1. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$. Niech $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową. Wykazać, że

$$\phi : V \times V \ni (v_1, v_2) \longrightarrow \frac{1}{4}\Big(f(v_1 + v_2) - f(v_1 - v_2)\Big)$$

jest formą dwuliniową skojarzoną z f (tzn. formą dwuliniową symetryczną taką, że $\phi(v, v) = f(v)$.)

2. Znaleźć macierz nastepującej formy kwadratowej o współczynnikach rzeczywistych (czyli macierz odpowiadającej jej formy symetrycznej):
   (a) $3x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$,
   (b) $5x_1^2 - x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2^2 - 7x_3^2$,
   (c) $-7x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$,
   (d) $x_1^2 + 2x_1x_5 + 3x_4^2 + 4x_3x_5$.

3. Znaleźć formy kwadratowe, których macierze mają postać:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 17 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Przykład 1. Sprowadzimy do postaci kanonicznej formę kwadratową

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Jej macierzą jest

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

f nie zawiera wyrażenia $x_i^2, i = 1, 2, 3$, więc stosujemy zamianę zmiennych

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \end{cases}, \qquad (\star)$$

i otrzymujemy, że

$$f(z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_3) = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) + 4(z_1 + z_2)z_3 - 8(z_1 - z_2)z_3 =$$
$$= z_1^2 - z_2^2 - 4z_1z_2 + 12z_2z_3.$$

Dalej

$$z_1^2 - z_2^2 - 4z_1z_3 + 12z_2z_3 = (z_1 - 2z_3)^2 - z_2^2 - 4z_3^2 + 12z_2z_3 =$$
$$= (z_1 - 2z_3)^2 - (z_2 - 6z_3)^2 + 36z_3^2 - 4z_3^2 = (z_1 - 2z_3)^2 - (z_2 - 6z_3)^2 + 32z_3^2.$$

Kładąc

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - 2z_3 \\ y_2 = z_2 - 6z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

otrzymujemy poszukiwaną zamianę zmiennych

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + 2y_3 \\ z_2 = y_2 + 6y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \tag{$\star\star$}$$

Macierzami odwzorowań odpowiednio ($\star$) oraz ($\star\star$) są

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

więc $diag(1, -1, 32) = (A_2)^T (A_1)^T B A_1 A_2$

4. Znaleźć postać kanoniczną następujących form kwadratowych. Dla każdej formy kwadratowej posiadającej macierz A i formę kanoniczną D znaleźć macierz P taką, że $D = P^T A P$:
   (a) $x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2$,
   (b) $2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$,
   (c) $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 3x_4^2$,
   (d) $x_1x_2 + x_3x_4$,
   (e) $x_1x_2 - x_2x_3$.

Prykład 2 (Metoda Jacobiego) Mamy następujące twierdzenie:
Niech $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową oraz niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

będzie macierzą stowarzyszoną z f. Niech

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix}$$

oraz niech $\triangle_0 = 1$, $\Delta_i = \det A_i$, $i = 1, \ldots, n$. Jeżeli $\Delta_i \neq 0, i = 1, \ldots, n$ to istnieje wtedy macierz $P \in GL_n(\mathbb{R})$ taka, że

$$f(PX) = X^T P^T A P X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} x_i^2.$$

Wykorzystamy to twierdzenie do określenia, czy dana forma kwadratowa jest dodatnio określona. Niech

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Forma ta ma macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = -1, \Delta_3 = 1$. Na mocy powyższego twierdzenia, f ma postać kanoniczną

$$g(Y) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2,$$

a zatem nie jest dodatnio określona.

5. Które z poniższych form kwadratowych o współczynnikach rzeczywistych są dodatnio określone?

   (a) $2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$,

   (b) $x_1^2 + 3x_2^2 + 39x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$,

   (c) $x_1^2 + 3x_2^2 + 22x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 16x_2x_3$,

   (d) $x_1^2 - 2x_2^2 - 27x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 14x_2x_3$.