Konforemne zoo na płaszczyźnie

Feliks Przytycki, IMPAN

21 listopada 2008, Warszawa MIMUW

Wstęp. Hipoteza Palisa

Wykład będzie przeglądem niektórych wyników i problemów dotyczących iteracji wielomianów i funkcji wymiernych P/Q na sferze Riemanna $\overline{\mathbb{C}}$. Iteracje funkcji dają działanie półgrupy $\mathbb{Z}^+$. To jest dział układów dynamicznych: działanie $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{R}^+$ lub grup $\mathbb{Z}$ lub $\mathbb{R}$. (To ostatnie to na ogół potok difeomorfizmów rozwiązujący zwyczajne równanie różniczkowe). Bada się zachowanie trajektorii gdy $t \in \mathbb{R}$ lub $n \in \mathbb{Z}$ dąży do nieskończoności.

Definicja

$f : M \to M$, $f \in K$ jest strukturalnie stabilne w klasie K jeśli dla każdego małego zaburzenia g istnieje homeomorfizm $h : M \to M$ taki, że $h \circ f = g \circ h$. (K to mogą być np. wielomiany, funkcje wymierne, analityczne, C^r.)

Definicja

Dla $f : M \to M$, zbiór $A \subset M$, $f(A) \subset A$ nazywa się hiperboliczny jeśli $T_A M = E^u \oplus E^s$ rozkłada się na dwie niezmiennicze podwiązki, Df na E^s jest kontrakcją, na E^u rozciąganiem.

Definicja

Zbiór punktów niebłądzących:

$$\Omega = \{x \in M : \ \forall \text{ otwartego } U \ni x, \exists n > 0 \ f^n(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

Przykłady

Załóżmy, że zbiór Ω jest hiperboliczny.

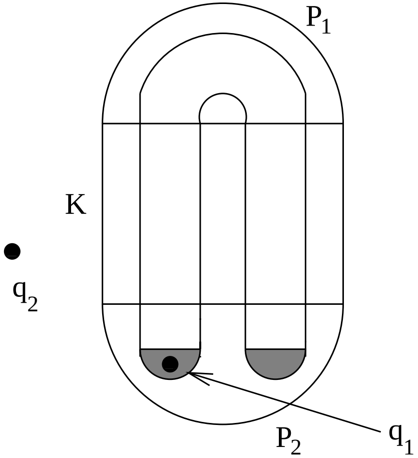
• f jest Morse'a-Smale'a jeśli zbiór Ω jest skończony i wszystkie punkty przecięcia rozmaitości stabilnych i niestabilnych są transwersalne. Przykłady: przekształcenia potoku gradientowego funkcji Morse'a.

• f jest Anosowa, jeśli $\Omega = M$. Przykład: działanie macierzą $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ na torusie.

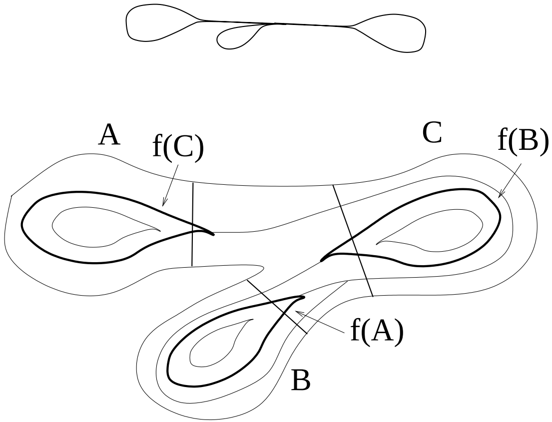
• f spełnia Aksjomat A Smale'a, jeśli oprócz hiperboliczności Ω, punkty okresowe są gęste w Ω.

Twierdzenie (Mañé, Palis)

f jest C^1-strukturalnie stabilne wtedy i tylko wtedy gdy spełnia Aksjomat A i silny warunek transwersalności.



Rysunek: Podkowa Smale'a



Rysunek: Atraktor Plykina

Strukturalnie stabilne dyfeomorfizmy nie są gęste!

Hipoteza

Hipoteza Palisa Na każdej zwartej gładkiej rozmaitości istnieje gęsty (w C^r) zbiór $\mathcal{D}$ układów dynamicznych takich, że istnieje skończona liczba atraktorów, których baseny przyciągania pokrywają prawie całą (w mierze Riemanna) rozmaitość. Każdy atraktor jest nośnikiem miar fizycznych (SRB), których baseny prawie pokrywają basen atraktora. Układy z $\mathcal{D}$ są w jakimś sensie stabilne, np. stochastycznie stabilne.

Definicja

Miara fizyczna (Sinai'a, Ruelle'a, Bowena) to taka miara m, że dla każdej funkcji ciagłej $\phi : M \to \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) = \int \phi \, dm$$

dla x ze zbioru dodatniej miary Riemanna. Ten zbiór ma nazwę basen miary m.

Przekształcenia odcinka

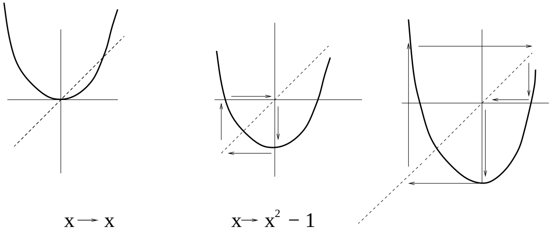
Dla gładkich przekształceń odcinka $f : I \to I$ hipotezę Palisa nazywa się rzeczywistą hipotezą Fatou. Została już ona prawie całkowicie udowodniona.

Twierdzenie (Świątek, Graczyk, Lyubich, van Strien, Kozlovsky, Shen)

Zbiór przekształceń hiperbolicznych jest gęsty w C^r. Gęstość zachodzi też np. wśród wielomianów nierenormalizowalnych dowolnego ustalonego stopnia oraz wśród wszystkich wielomianów kwadratowych.

Definicja

Przekształcenie unimodalne (z jednym punktem krytycznym) $f : I \to I$ nazywa się renormalizowalne jeśli istnieje odcinek $J \subset I$ zawierający punkt krytyczny c i $n > 1$ takie, że $f^n(J) \subset J$ oraz $Rf := f^n|_J$ jest unimodalne.



Rysunek: Renormalizacja okresu 2 Renormalizacja okresu 3

Przekształcenia wymierne

Niech $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ będzie przekształceniem holomorficznym sfery Riemanna w siebie. Wtedy $f = P/Q$, tzn jest funkcją wymierną, ilorazem dwóch wielomianów. Załóżmy, że f ma stopień co najmniej 2.

Definicja

Zbiór

$$J(f) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \forall \text{ otwartego } U \ni x, \\ \text{rodzina funkcji } f^n|_U, n = 1, 2, \dots \text{ nie jest normalna}\},$$

gdzie normalna oznacza, że z każdego podciągu można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny na zwartych podzbiorach dziedziny U.

$J(f)$ nazywa się zbiorem Julii

Hipoteza

Zespolona hipoteza Fatou. Funkcje wymierne hiperboliczne są gęste w zbiorze funkcji wymiernych.

Hiperboliczność oznacza dla funkcji wymiernych, że f jednostajnie rozciąga na zbiorze Julii (expanding), tzn. że istnieje $k \geq 1$ takie, że $|f^k| > 1$. Wtedy zbiór Fatou czyli $F(f) := \overline{\mathbb{C}} \setminus J(f)$ składa się z basenów przyciagania okresowych orbit przyciągających.

Żeby udowodnić hipotezę Fatou trzeba umieć dowolnie małym zaburzeniem funkcji f zepchnąć punkty krytyczne $f'(c) = 0$ ze zbioru Julii. Niestety przy ruszeniu punktów krytycznych rusza się też zbiór Julii.

Twierdzenie (Mané, Sad, Sullivan)

Strukturalnie stabilne są gęste w zbiorze funkcji wymiernych.

Rysunek: Pierre Fatou, 1878-1929 Gaston Julia, 1893-1978

Własności zbioru Julii $J(f)$:

$f^{-1}(J(f)) = J(f)$ (całkowicie f-niezmienniczy), zwarty, w sobie gęsty, nieprzeliczalny, $J(f) = \overline{Per(f)}$, $J(f)$ jest całą sferą lub jest brzegowy. Zbiór Julii można uważać za duży chaotyczny zbiór odpychający.

Własności zbioru Fatou:

Ten zbiór składa się z przeliczalnej liczby składowych, to obszary normalności rodziny iteracji f^n. Jest to skończona liczba składowych okresowych oraz ich przeciwobrazy przy f^{-n}.

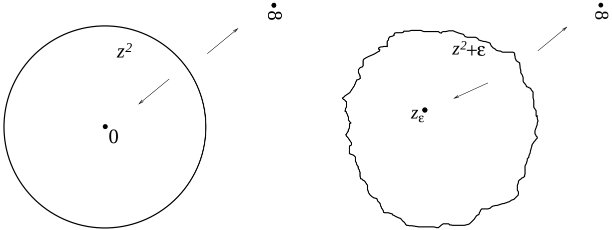
Twierdzenie (Julia, Fatou)

Każda składowa okresowa $U : f^k(U) = U$ zbioru Fatou jest jednego z 4 typów:

1. *jest przyciągana do orbity okresowej przyciągającej okresu k leżącej w $\bigcup_{j=0}^{k-1} f^j(U)$,*
2. *jest przyciągana do orbity okresowej parabolicznej, $(p, \ldots, f^{k-1}(p))$, $(f^k)'(p)$ jest pierwiastkiem z 1, leżącej w brzegu $\bigcup_{j=0}^{k-1} f^j(U)$*
3. *jest dyskiem Siegela, tzn istnieje biholomorficzne przekształcenie $h : U \to D$ obszaru U na dysk jednostkowy D, i $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że dla obrotu $\rho_\alpha(z) := e^{\alpha i} z$ mamy $h \circ f = \rho_\alpha \circ h$ na U.*
4. *jest pierścieniem Hermana, tzn istnieje biholomorficzne przekształcenie $h : U \to R$ obszaru U na $R := \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b\}$ dla jakichś dodatnich liczb $a < b$, i istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że dla obrotu $\rho_\alpha(z) := e^{\alpha i} z$ mamy $h \circ f = \rho_\alpha \circ h$ na U.*

W przypadkach 1. i 2. $\bigcup_{j=0}^{k-1} f^j(U)$ zawiera punkt krytyczny. Faktyczne istnienie przypadków 3. i 4. przewidziane przez Julia i Fatou, zostalo udowodnione przez odpowiednio Siegela i Hermana, i wiąże się z istnieniem linearyzacji dla α powoli przybliżanej przez liczby wymierne.

Nieistnienie składowej błądzącej udowodnił Dennis Sullivan w 1981 r. używając techniki przekształceń quasikonforemnych (Tw. Bojarskiego, Ahlforsa, Bersa).
Skończość liczby składowych okresowych wynika z ograniczoności liczby punktów krytycznych (przez $2\deg(f) - 2$). Skończoność liczby dysków Siegela i pierścieni Hermana wynika z teorii Sullivana.



zbiór Julii dla $f(z) = z^2$, dla $f_\varepsilon(z) = z^2 + \varepsilon, \varepsilon \approx 0$

Dla wielomianów zbiór Julii to brzeg zbioru $A_\infty = A_\infty(f)$, basenu przyciągania do ∞. Łatwo pokazać, że A_∞ ma tylko jedną składową.

Dla wielomianu f używane jest też pojęcie: wypełniony zbiór Julii $K(f) = \overline{\mathbb{C}} \setminus A_\infty$.

$J(f_c)$ jest topologicznym okręgiem jeśli istnieje przyciągający punkt stały, tzn.

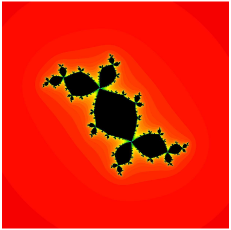
$$f_c(z_c) = z_c, \; |f_c'(z_c)| < 1.$$

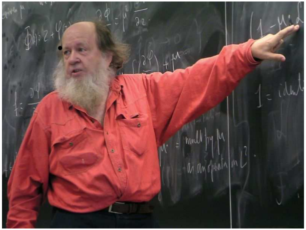
Na brzegu tego obszaru M_0 w parametrach, mamy

$$z_c^2 + c = z_c \quad \text{i} \quad |2z_c| = |f_c'(z_c)| = 1$$

Zatem $c(\lambda) = -\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{\lambda}{2}$ dla $|\lambda| = 1$.
To jest równanie parametryczne tzw. kardioidy.

Dla c poza obszarem wewnątrz kardioidy mogą nastąpić samozlepienia topologicznego okręgu $J(f_c)$.





Rysunek: królik Douady'ego

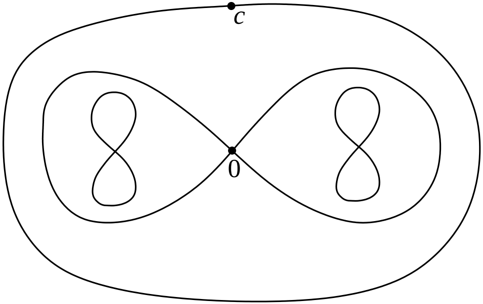
Adrien Douady, 1935-2006

Stwierdzenie

Dla wielomianów kwadratowych $f = f_c$ równoważne są następujące warunki:

1. $0 \quad (lub\ c = f_c(0)) \quad \in A_\infty(f)$
2. *zbiór $K(f)$ (lub $J(f)$) jest niespójny*
3. *$K(f) = J(f)$ jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.*

Dowód widać na rysunku:



Rysunek: okulary

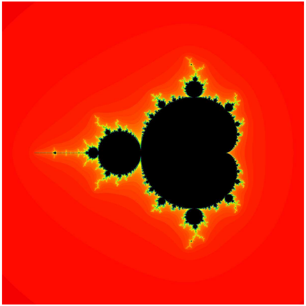
Zbiór Mandelbrota

Definicja

Zbiór Mandelbrota

$$M = \{c \in \mathbb{C} : f_c^n(0) \to \infty\}.$$

Równoważnie można napisać, że zbiór $\{f_c^n(0)\}$ jest nieograniczony.



Rysunek: Zbiór Mandelbrota

Dla c dużych zbiór Julii $J(f_c)$ rozsypuje się w zbiór Cantora. Tzn, że zbiór Mandelbrota jest ograniczony. Np. zachodzi

Stwierdzenie

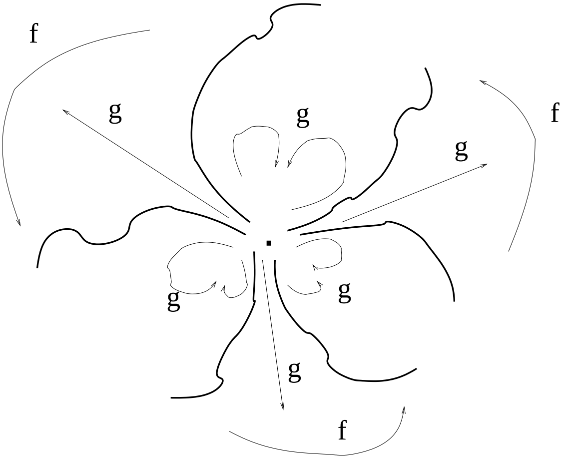
$M \subset \{c : |c| \leq 2\}$.

Faktycznie $|c| \geq 2 + a$ dla $a > 0$ i $|z| \geq |c|$ implikuje

$$|z^2 + c| \geq |c| \cdot |z| - |c| \geq (2 + a)|z| - |c| = (1 + a)|z|.$$

więc $f_c^n(0) \to \infty$, dowód przez indukcję.

Trochę trudniej, (ale nie bardzo trudno) jest udowodnić, że M i $\mathbb{C} \setminus M$ są spójne (chociaż na obrazkach tej spójności M nie widać). Od kardioidy oddzielają się drugorzędne zbiory Mandelbrota w parametrach $c(e^{2\pi i\alpha})$ dla α wymiernych. Punkt paraboliczny dla nieskracalnego $\alpha = p/q$ zamienia się w stałe źródło, od którego oddziela się okresowa trajektoria przyciągająca okresu q.



Rysunek: kwiatek

Dla $\alpha = p/q$ i $g = f^q$, po przesunięciu współrzędnych tak, żeby punkt stały był w zerze, mamy $g(z) = z + z^{q+1} + O(|z^{2q+1}|)$. Istotnie więc dynamika w otoczeniu punktu stałego parabolicznego wygląda tak jak na tym rysunku.

Hipoteza

MLC *Zbiór Mandelbrota jest lokalnie spójny.*

Zbiór Julii dla wielomianów może być spójny i nie być lokalnie spójny (Douady).

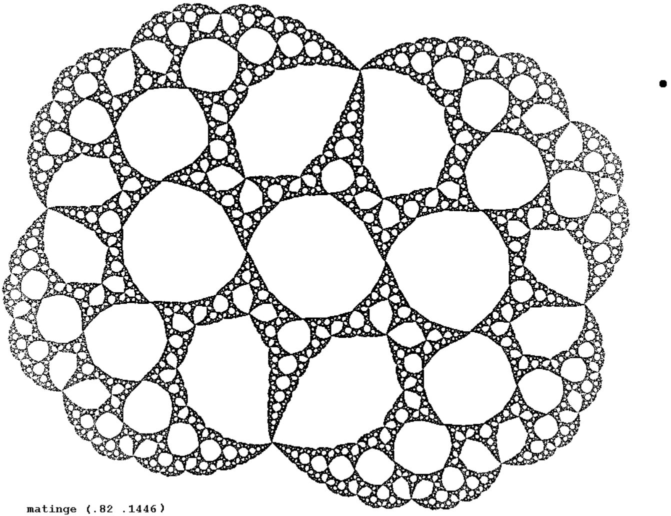
Twierdzenie (Douady, Hubbard)

MLC implikuje Zespoloną Hipotezę Fatou (gęstość hiperbolicznych) w klasie wielomianów kwadratowych.

Twierdzenie (Douady, Cheritat, Buff, Shishikura)

Istnieje $c = c(\lambda)$ *na kardioidzie takie, że miara Lebesgue'a* $J(f_c)$ *jest dodatnia.*

Funkcje wymierne stopnia 2



Rysunek: "mating": bazylika i królik

Miary Gibbsa

Twierdzenie (Ruelle,...)

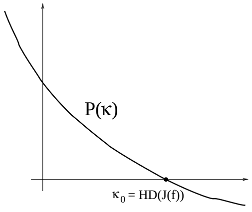
Załóżmy, że funkcja wymierna $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *jest hiperboliczna, tzn. jest przekształceniem rozciągającym na* $J(f)$*. Niech* $\phi : J(f) \to \mathbb{R}$ *będzie dowolną funkcją hölderowsko ciągłą. Wtedy istnieje miara niezmiennicza* μ *na* $J(f)$ *(tzn. taka, że dla każdego borelowskiego* $A \subset J(f)$ *mamy* $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$*), taka, że* $\exists C > 0, \forall z \in J(f)$ *i* $r > 0$ *małego, dla każdego* $n \geq 0$*, oznaczając* $S_n\phi = \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j$*,*

$$C^{-1} \leq \frac{\mu(Comp_z f^{-n}(B(f^n(z), r))}{e^{S_n\phi(z) - Pn}} \leq C.$$

Miara μ jest nazywana miarą Gibbsa, lub stanem równowagi, dla funkcji potencjału ϕ. Normalizującą liczbę P nazywa się: ciśnienie. Miara μ maksymalizuje $h_\nu(f) + \int \phi d\nu$ po niezmienniczych miarach probabilistycznych ν. h oznacza entropię. Mamy też $h_\mu(f) + \int \phi d\mu = P$.

Związki z geometrią

Badamy miary Gibbsa dla ϕ postaci $-\kappa \log|f'|$. Oto wykres $P = P(\kappa) := P(-\kappa \log|f'|)$.



Rysunek: wykres funkcji ciśnienia

Niech $P(\kappa_0) = 0$. Wtedy

$$\mu(\mathrm{Comp}_z f^{-n}(B(f^n(z), r))) \approx |(f^n)'(z)|^{-\kappa_0}$$

Zatem oznaczając „prawie kulę" $\mathrm{Comp}_z f^{-n}(B(f^n(z), r))$ przez $D_n(z)$, mamy $\mu(D_n(z)) \approx \mathrm{diam}(D_n(z))^{\kappa_0}$. Wnioskujemy, że wymiar Hausdorffa $HD(J(f)) = \kappa_0$, czyli zero ciśnienia.

Poprzez transformatę Legendre'a funkcji $P(\kappa)$ otrzymujemy informację np. o funkcji spektrum lokalnych wymiarów dla miary harmonicznej ω na $J(f)$ (widzianym z ∞) dla wielomianu f.

$$F(\alpha) = HD\left\{z \in J(f) : \lim_{r\to 0} \frac{\log \omega(B(z,r))}{\log r} = \alpha\right\}.$$

DZIEKUJĘ ZA UWAGĘ