Piotr Pragacz (Warszawa)*

Życie i dzieło Alexandra Grothendiecka

Cóż może być pokorniejsze od wody?
Lecz kiedy podmywa skaliste brzegi
I gwałtownie napiera, nic jej się nie oprze,
Żadna przeszkoda nie zmieni jej biegu.

Lao Tsy: *Tao Te King*

Opowiadamy tu historię Alexandra Grothendiecka — człowieka, który zmienił oblicze matematyki w ciągu około 20 lat pracy nad analizą funkcjonalną i geometrią algebraiczną. W ubiegłym roku minęła 75. rocznica jego urodzin. Ten artykuł powstał w kwietniu 2004 r. na podstawie 2 odczytów: na *Konferencji Matematyki Poglądowej* w Grzegorzewicach zorganizowanej przez M. Kordosa (sierpień 2003), oraz na Sesji Impangi([1]) *Hommage à Grothendieck*, zorganizowanej przez autora w Centrum Banacha w Warszawie (styczeń 2004). Głównym celem niniejszego artykułu jest przybliżenie polskim matematykom podstawowych idei matematycznego dzieła Grothendiecka.

Alexander Grothendieck urodził się w Berlinie w roku 1928. Jego ojciec — Alexander Shapiro (1890–1942) był rosyjskim Żydem pochodzącym z chasydzkiego miasteczka, gdzie dzisiaj spotyka się Rosja, Ukraina i Białoruś. Był działaczem politycznym (anarchistą) biorącym udział we wszystkich ważnych rewolucjach w Europie w okresie 1905–1939. W la-

* Praca napisana w ramach tematu KBN No. 2 P03A 024 23.

([1]) *Impanga* to nazwa ogólnopolskiej grupy geometrii algebraicznej, działającej od 2000 r. w Instytucie Matematycznym PAN. W czasie tej sesji wykłady wygłosili: M. Chałupnik: *Topologie Grothendiecka i kohomologie etalne*, T. Maszczyk: *Toposy i jedność matematyki*, J. Gorski: *Stogi Grothendiecka na równinie Mazowsza*, O. Kędzierski: *Dlaczego kategorie pochodne?*, A. Weber: *Hipotezy Weila*, G. Banaszak: *Reprezentacje l-adyczne*, P. Krasoń: *Grupy Mordella-Weila rozmaitości Abelowych*.

tach dwudziestych i trzydziestych żył głównie w Niemczech, działając w lewicowych ruchach przeciw rosnącemu w siłę nazizmowi. Utrzymywał się z pracy ulicznego fotografa. W Niemczech spotkał on, urodzoną w Hamburgu, Hankę Grothendieck (1900–1957). (Nazwisko *Grothendieck* pochodzi z *plattdeutsch* — odmiany j. niemieckiego występującej na północy Niemiec). Hanka Grothendieck pracowała dorywczo jako dziennikarka, a tak naprawdę to pasjonowało ją pisarstwo. 28 marca 1928 roku urodziła syna Alexandra.

Bardzo młody Alexander Grothendieck

W latach 1928–1933 Alexander żył razem z rodzicami w Berlinie. Gdy Hitler doszedł do władzy, rodzice Alexandra wyemigrowali do Francji; on tymczasem przebywał (przez około 5 lat) u przybranej rodziny w Hamburgu, gdzie uczęszczał najpierw do szkoły a potem do gimnazjum. W 1939 r. dołączył do rodziców we Francji. Jego ojca wkrótce internowano w obozie Vernet; następnie został on wydany przez władze Vichy hitlerowcom i zginął w 1942 r. w Auschwitz.

Hanka i Alexander Grothendieck przetrwali okupację nie bez problemów. W latach 1940–1942 byli internowani — jako „niebezpieczni cudzoziemcy" — w obozie Rieucros koło Mende na południu Francji. Następnie Hanka została przeniesiona do obozu Gurs w Pirenejach, podczas gdy Alexander miał możliwość kontynuowania nauki w liceum Collège Cévenol w miejscowości Chambon-sur-Lignon w Górach Cévennes, w południowej części Masywu Centralnego. Liceum to, prowadzone przez miejscowych protestantów, pomogło przetrwać okupację wielu dzieciom zagrożonym w czasie wojny. Już wtedy miało miejsce wydarzenie, które pokazało wyjątkowość umysłu Alexandra — *sam* zadał sobie pytanie: jak precyzyjnie mierzyć długości krzywych, pola figur płaskich i objętości brył? W refleksji nad tymi problemami, kontynuowanej w czasie studiów uniwersyteckich w

Montpellier (1945–1948), samodzielnie doszedł do rezultatów równoważnych teorii miary i całki Lebesgue'a([2]). Jak pisze J. Dieudonné w [D], uniwersytet w Montpellier — w okresie gdy studiował tam Grothendieck — nie był „odpowiednim miejscem" do poznawania wielkich problemów matematycznych.... Na jesieni 1948 r. Grothendieck przybył do Paryża, gdzie spędził rok jako „wolny słuchacz" słynnej École Normale Supérieure (ENS), z której pochodzi większość elity francuskiej matematyki. W szczególności brał udział w legendarnym Seminarium H. Cartana, które tego roku było poświęcone topologii algebraicznej. (Więcej informacji o opowiedzianym do tej pory okresie życia Grothendiecka, o jego rodzicach oraz o Francji tamtych lat można znaleźć w [C2]).

Ale zainteresowania Grothendiecka zaczynają się ogniskować wokół analizy funkcjonalnej. Za radą Cartana przybywa on w październiku 1949 r. do Nancy, gdzie analizą funkcjonalną zajmują się J. Dieudonné, L. Schwartz i inni. Prowadzą oni seminarium z przestrzeni Frécheta i ich granic prostych i napotykają szereg problemów, których nie potrafią rozwiązać. Proponują Grothendieckowi zajęcie się tymi problemami i rezultat przechodzi ich oczekiwania. Grothendieck potrzebuje mniej niż roku, aby rozwiązać wszystkie te problemy za pomocą bardzo pomysłowych konstrukcji. Gdy staje sprawa jego doktoratu, Grothendieck dysponuje 6 tekstami, z których każdy mógłby stanowić bardzo dobry doktorat. Swoją rozprawę doktorską dedykowaną matce([3]):

Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires

HANKA GROTHENDIECK in Verehrung und Dankbarkeit gewidmet

finalizuje w roku 1953. Rozprawa ta, opublikowana w roku 1955 przez *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* [18]([4]), jest zgodnie uznawana za jedno z najważniejszych wydarzeń w powojennej analizie funkcjonalnej([5]). Okres intensywnej pracy Grothendiecka nad analizą funkcjonalną przypada na lata 1950–1955. W swoich pierwszych pracach (napisanych w wieku około 22 lat)

([2]) Tę historię dedykuję czytającym ten artykuł nauczycielom — zwracajcie uwagę na uczniów, którzy potrafią sami stawiać sobie ważne i naturalne pytania matematyczne — to z nich będą się rekrutowali „Kolumbowie matematyki".

([3]) Grothendieck był niezwykle przywiązany do swojej matki. Rozmawiał z nią po niemiecku. Była ona autorką wierszy i powieści (bodaj najbardziej znanym jej utworem jest autobiograficzna powieść *Eine Frau*).

([4]) Pełna lista publikacji matematycznych Grothendiecka została opublikowana w [C&], vol. 1, str. xiii–xx. W niniejszym artykule, cytując jakąś publikacje Grothendiecka bedziemy podawali jej numer z tej listy.

([5]) i nazywana *czerwoną książeczką Grothendiecka*

Grothendieck stawia wiele pytań o strukturze przestrzeni liniowo-topologicznych lokalnie wypukłych, w szczególności liniowo metrycznych zupełnych. Pewne z nich wiążą się z teorią liniowych równań różniczkowych cząstkowych i przestrzeniami funkcji analitycznych. Twierdzenie Schwartza o jądrze doprowadza Grothendiecka do wyróżnienia klasy *przestrzeni nuklearnych*([6]). Z grubsza mówiąc twierdzenie o jądrze orzeka, że „porządne" operatory na dystrybucjach są nadal dystrybucjami; ten fakt Grothendieck wypowiada abstrakcyjnie jako izomorfizm odpowiednich produktów tensorowych iniektywnych i projektywnych. Podstawowa trudność, jaka przy wprowadzeniu teorii przestrzeni nuklearnych się pojawia, to pytanie, czy dwie interpretacje jąder: jako elementów produktu tensorowego i jako operatorów liniowych, są tożsame (w przypadku przestrzeni wymiaru skończonego macierze są w pełnej odpowiedniości z przekształceniami liniowymi). Prowadzi to do tzw. *problemu aproksymacji* (postawionego po raz pierwszy w pewnej wersji w sławnej monografii S. Banacha [B]), którego głębokie studium zajmuje sporą część czerwonej książeczki. Grothendieck odkrywa wiele pięknych równoważności (niektóre implikacje były znane wcześniej S. Banachowi i S. Mazurowi); między innymi pokazuje, że problem aproksymacji jest równoważny problemowi 153 z *Księgi Szkockiej* [Ma], postawionemu przez Mazura, a dla przestrzeni refleksywnych własność aproksymacji jest równoważna tzw. metrycznej własności aproksymacji. Przestrzenie nuklearne związane są także z twierdzeniem Dvoretzky'ego-Rogersa z 1950 r. (rozwiązującym problem 122 z [Ma]): w każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha istnieje bezwarunkowo zbieżny szereg, który nie jest absolutnie zbieżny. Grothendieck pokazał, że przestrzenie nuklearne to te, dla których bezwarunkowa zbieżność szeregu jest równoważna ze zbieżnoscią absolutną (patrz [Ma, problem 122 i komentarz]). Podstawowe znaczenie przestrzeni nuklearnych bierze się m.in. stąd, że prawie wszystkie pojawiające się naturalnie w analizie przestrzenie lokalnie wypukłe, które nie są przestrzeniami Banacha, są nuklearne. Mamy tu na myśli różnorakie przestrzenie funkcji gładkich, dystrybucji i funkcji holomorficznych z ich naturalnymi topologiami — w wielu przypadkach ich nuklearność pokazał sam Grothendieck.

Inny ważny wynik czerwonej książeczki to równoważność produktowej definicji przestrzeni nuklearnych z określeniem ich jako granic odwrotnych przestrzeni Banacha z morfizmami będącymi operatorami nuklearnymi lub absolutnie sumującymi (które Grothendieck nazywa *semi-inte-*

([6]) Grothendieck był przez całe życie zagorzałym pacyfistą. Uważał, że słowa „nuklearne" można użyć tylko do abstrakcyjnych pojęć matematycznych. W czasie wojny w Wietnamie prowadził wykłady z teorii kategorii w lesie otaczającym Hanoi, podczas amerykańskich bombardowań tego miasta.

gralnymi z lewa). Badanie różnych klas operatorów (Grothendieck pierwszy definiuje je funktorialnie w duchu teorii kategorii) doprowadza go do głębokich wyników, które zapoczątkowały nowoczesną, tzw. *lokalną teorię przestrzeni Banacha*. Rezultaty te publikuje on w dwóch ważnych artykułach [22, 26] w *Bol. Soc. Mat. São Paulo*, przy okazji swego pobytu w tym mieście (1953–1955). W pracach tych między innymi dowodzi, że operatory z przestrzeni miar w przestrzeń Hilberta są absolutnie sumujące (analitycznie równoważną formą jest tzw. *nierówność Grothendiecka*) oraz formułuje jako hipotezę centralny problem w teorii ciał wypukłych rozwiązany w 1959 r. przez A. Dvoretzky'ego. Wiele bardzo trudnych pytań postawionych w tych pracach zostało rozwiązanych przez: P. Enflo (negatywne rozstrzygnięcie w 1972 r. problemu aproksymacji), B. Maurey'a, G. Pisiera, J. Taskinena («problème des topologies» o zbiorach ograniczonych w iloczynach tensorowych), U. Haagerupa (niekomutatywny, dla C^*-algebr, analog nierówności Grothendiecka), laureata Medalu Fieldsa — J. Bourgaina i pośrednio miało wpływ na wyniki drugiego „Banachowskiego" medalisty Fieldsa — T. Gowersa. Podobno do dziś otwarty pozostał tylko jeden problem w analizie funkcjonalnej postawiony przez Grothendiecka, patrz [PB, 8.5.19].

Reasumując: wkład Grothendiecka w analizie funkcjonalnej to: przestrzenie nuklearne, iloczyny tensorowe topologiczne, nierówność Grothendiecka i związki z operatorami absolutnie sumującymi oraz... mnóstwo innych rozproszonych wyników. Z tego okresu pracy Grothendiecka pochodzi także skromny polonik: jego praca [33] w *Studia Mathematica* z roku 1961([7]).

Odnotujmy, że bodaj najbardziej znana praca [LP] A. Pełczyńskiego (wspólna z J. Lindenstraussem) o operatorach absolutnie sumujących jest oparta na ideach Grothendiecka pochodzących z pracy [22] (bardzo trudno czytelnej). To w dużym stopniu dzięki tej pracy Lindenstraussa i Pełczyńskiego idee Grothendiecka zostały przyswojone teorii przestrzeni Banacha.

W roku 1955 następuje zmiana matematycznych zainteresowań Grothendiecka w kierunku algebry homologicznej. Jest to okres, gdy algebra homologiczna dzięki pracom H. Cartana i S. Eilenberga święci triumfy jako potężne narzędzie topologii algebraicznej. W roku 1955, w czasie swego pobytu na Uniwersytecie w Kansas, Grothendieck opracowuje aksjomatyczną teorię *kategorii Abelowych*. Jego główny wynik mówi, że snopy modułów tworzą kategorię Abelową posiadającą wystarczająco dużo obiektów iniektywnych, co pozwala zdefiniować kohomologie o wartościach w takim snopie bez ograniczeń na rodzaj snopa oraz przestrzeń bazową (ta teoria ukazuje

([7]) Powyższe informacje o wkładzie Grothendiecka do analizy funkcjonalnej zaczerpnąłem głównie z [P].

się w japońskim czasopiśmie matematycznym *Tôhoku*, patrz [28]).

Po algebrze homologicznej, zainteresowania Grothendiecka kierują się w stronę geometrii algebraicznej. Spory wpływ mają tu kontakty z C. Chevalley'em i J-P. Serre'em. Tego pierwszego darzy Grothendieck wielką osobistą przyjaźnią i bierze, w następnych latach, udział w jego słynnym seminarium w ENS, wygłaszając szereg wykładów z grup algebraicznych i teorii przecięć [81–86]. Drugiego z wymienionych matematyków, obdarzonego ogromną wiedzą z geometrii algebraicznej, Grothendieck traktuje jako niewyczerpane źródło wiadomości na ten temat, zadając mu mnóstwo pytań (ostatnio Francuskie Towarzystwo Matematyczne opublikowało obszerny wyciąg korespondencji między tymi matematykami [CS]; z tej książki można nauczyć się więcej geometrii algebraicznej niż z niejednej monografii). Artykuł Serre'a [S1], budujący podstawy teorii snopów i ich kohomologii w geometrii algebraicznej, ma kluczowe znaczenie dla Grothendiecka.

Jednym z pierwszych rezultatów Grothendiecka w geometrii algebraicznej jest klasyfikacja wiązek holomorficznych nad sferą Riemanna [25]. Mówi on, że każda taka wiązka jest sumą prostą pewnej liczby potęg tensorowych tautologicznej wiązki liniowej. Jakiś czas po opublikowaniu pracy okazało się, że inne „wcielenia" tego rezulatu były znane znacznie wcześniej takim matematykom jak G. Birkhoff, D. Hilbert, a także R. Dedekind i H. Weber (1892). Historia ta dowodzi — z jednej strony — ogromnego wyczucia Grothendiecka na ważne problemy w matematyce, ale z drugiej — także braku znajomości klasycznej literatury. Rzeczywiście Grothendieck nie był „molem książkowym", wolał poznawać matematykę w rozmowach z innymi matematykami. Niemniej ta praca Grothendiecka zapoczątkowała systematyczne badania nad klasyfikacją wiązek nad przestrzeniami rzutowymi i innymi rozmaitościami.

Geometrią algebraiczną zajmuje się Grothendieck w latach 1956–1970. Głównym motywem przewodnim na początku tego okresu jest transformowanie twierdzeń „absolutnych" (o rozmaitościach) na twierdzenia „relatywne" (o morfizmach). Oto przykład twierdzenia absolutnego([8]):

Jeżeli X jest rozmaitością zupełną (np. rzutową), $\mathcal{F}$ snopem koherentnym (np. snopem przekrojów wiązki wektorowej), to $\dim H^j(X,\mathcal{F}) < \infty$.

A to jest jego wersja relatywna:

Jeżeli $f : X \to Y$ jest morfizmem właściwym (np. morfizmem między dwiema rozmaitościami rzutowymi), $\mathcal{F}$ jest koherentny na X, to $\mathcal{R}^j f_*\mathcal{F}$

([8]) W dalszej części artykułu będę używał pewnych standardowych pojęć i oznaczeń z geometrii algebraicznej (patrz [H]). Przez *rozmaitość* — o ile coś innego nie wynika z tekstu — będziemy rozumieli algebraiczną rozmaitość zespoloną. Grupy kohomologii takiej rozmaitości — o ile inny snop współczynników nie będzie jasno podany — będą miały za współczynniki ciało liczb wymiernych.

jest koherentny na Y.

Główne osiągnięcie Grothendiecka z tego okresu związane jest z relatywnym twierdzeniem Hirzebrucha-Riemanna-Rocha. Oryginalny problem, który motywował pracę nad tym zagadnieniem, można sformułować następująco: dana jest gładka, spójna rozmaitość rzutowa X i wiązka wektorowa E nad X; obliczyć $\dim H^0(X, E)$ czyli wymiar przestrzeni przekrojów globalnych E. Ogromna intuicja Serre'a podpowiedziała mu, że ten problem należy przeformułować używając także wyższych grup kohomologii. Mianowicie, Serre sformułował hipotezę, że liczba

$$\sum(-1)^i \dim H^i(X, E)$$

powinna się wyrażać przez topologiczne niezmienniki związane z X i E. Oczywiście punktem wyjścia Serre'a było przeformułowanie klasycznego twierdzenia Riemanna-Rocha dla krzywej X: dla dywizora D i stowarzyszonej z nim wiązki liniowej $\mathcal{L}(D)$,

$$\dim H^0(X, \mathcal{L}(D)) - \dim H^1(X, \mathcal{L}(D)) = \deg D + \frac{1}{2}\chi(X)\,.$$

(Analogiczny wzór dla powierzchni był także znany).

Hipotezę tę udowodnił (w roku 1953) F. Hirzebruch, inspirowany wcześniejszymi pomysłowymi rachunkami J. A. Todda. Oto wzór odkryty przez Hirzebrucha dla rozmaitości X wymiaru n:

$$(*) \qquad \sum(-1)^i \dim H^i(X, E) = \deg(\mathrm{ch}(E)\,\mathrm{td}\, X)_{2n}\,,$$

gdzie $(-)_{2n}$ oznacza składową stopnia $2n$ elementu w pierścieniu kohomologii $H^*(X)$ oraz

$$\mathrm{ch}(E) = \sum e^{a_i} \quad , \quad \mathrm{td}\, X = \prod \frac{x_j}{1 - e^{-x_j}}$$

(a_i są tu pierwiastkami Cherna E (9), x_j oznaczają pierwiastki Cherna wiązki stycznej TX).

Aby sformułować wersję relatywną tego rezultatu, załóżmy, że mamy morfizm właściwy $f : X \to Y$ między gładkimi rozmaitościami. Chcemy zrozumieć związek między

$$\mathrm{ch}_X(-)\mathrm{td}\, X \quad \text{oraz} \quad \mathrm{ch}_Y(-)\mathrm{td}\, Y,$$

„indukowany" przez f. W przypadku gdy $f : X \to Y = pkt$, powinniśmy otrzymać twierdzenie Hirzebrucha-Riemanna-Rocha. Relatywizacja prawej strony $(*)$ jest prosta: istnieje dobrze zdefiniowane addytywne odwzorowanie grup kohomologii $f_* : H(X) \to H(Y)$ i $\deg(z)_{2n}$ odpowiada $f_*(z)$ dla $z \in H(X)$. Jak zrelatywizować lewą stronę $(*)$? Wersję relatywną $H^j(X, \mathcal{F})$

(9) Są to klasy dywizorów stowarzyszonych z wiązkami liniowymi, rozszczepiającymi wiązkę E (patrz [H, str. 430]).

stanowią $\mathcal{R}^j f_*\mathcal{F}$ — są to moduły koherentne, znikające dla $j \gg 0$. Aby zrelatywizować sumę alternującą, Grothendieck definiuje następującą grupę $K(Y)$ (zwaną obecnie *grupą Grothendiecka*). Jest to grupa ilorazowa „bardzo dużej" wolnej grupy Abelowej generowanej przez klasy izomorfizmu $[\mathcal{F}]$ snopów koherentnych na Y, modulo relacje

$$[\mathcal{F}] = [\mathcal{F}'] + [\mathcal{F}''],$$

gdy istnieje ciąg dokładny

$$(**) \qquad 0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0\,.$$

Grupa $K(Y)$ spełnia następującą własność uniwersalności: dowolne odwzorowanie φ prowadzące z $\bigoplus \mathbf{Z}[\mathcal{F}]$ do grupy Abelowej, spełniające

$$(***) \qquad \varphi([\mathcal{F}]) = \varphi([\mathcal{F}']) + \varphi([\mathcal{F}'']),$$

faktoryzuje się przez $K(Y)$. W naszej sytuacji definiujemy

$$\varphi([\mathcal{F}]) := \sum (-1)^j [\mathcal{R}^j f_*\mathcal{F}] \in K(Y)\,.$$

Zauważmy, że relacja $(***)$ wynika z długiego ciągu dokładnego funktorów pochodnych

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{R}^j f_*\mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{R}^j f_*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R}^j f_*\mathcal{F}'' \longrightarrow \mathcal{R}^{j+1} f_*\mathcal{F}' \longrightarrow \cdots\,,$$

stowarzyszonego z krótkim ciągiem dokładnym $(**)$ (patrz [H, Rozdz. III]). Zatem mamy odwzorowanie addytywne

$$f_! : K(X) \to K(Y)\,.$$

Teraz *relatywne* twierdzenie Hirzebrucha-Riemanna-Rocha, odkryte przez Grothendiecka ([102], [BS]) i noszące znamię geniuszu, orzeka przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\;f_!\;} & K(Y) \\ {\scriptstyle \mathrm{ch}_X(-)\mathrm{td}\,X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}_Y(-)\mathrm{td}\,Y} \\ H(X) & \xrightarrow{\;f_*\;} & H(Y). \end{array}$$

(Odnotujmy, że dzięki addytywności charakter Cherna $\mathrm{ch}(-)$ jest dobrze określony w K-teorii). Więcej informacji o różnych aspektach teorii przecięć, której koronnym rezultatem jest opisane tu twierdzenie Grothendiecka-Riemanna-Rocha, można znaleźć w [H, Dodatek A]. Twierdzenie to znalazło wiele zastosowań w konkretnych obliczeniach klas charakterystycznych.

Grupa K Grothendiecka rozpoczęła rozwój K-teorii, znaczonej pracami D. Quillena i wielu innych matematyków. Odnotujmy, że K-teoria odgrywa istotną rolę w wielu dziedzinach matematyki, od teorii operatorów różniczkowych (twierdzenie Atiyah-Singera) po modularną teorię reprezentacji grup skończonych (twierdzenie Brauera)([10]).

Po tym spektakularnym rezultacie Grothendieck zostaje ogłoszony „super-gwiazdą" geometrii algebraicznej i zaproszony na Międzynarodowy Kongres Matematyczny w Edynburgu w 1958 r., gdzie szkicuje program zdefiniowania nad ciałem dodatniej charakterystyki teorii kohomologii, które prowadziłyby do dowodu hipotez A. Weila, patrz [32]. Hipotezy Weila [W] sugerowały głębokie związki między arytmetyką rozmaitości algebraicznych nad ciałami skończonymi i topologią rozmaitości algebraicznych nad ciałem liczb zespolonych. Niech $k = \mathbf{F}_q$ będzie ciałem skończonym o q elementach oraz $\bar{k}$ — jego algebraicznym domknięciem. Ustalmy skończony układ wielomianów jednorodnych $n+1$ zmiennych o współczynnikach w k. Niech X (odp. $\bar{X}$) będzie zbiorem zer tego układu w n-wymiarowej przestrzeni rzutowej nad k (odp. nad $\bar{k}$). Przez N_r oznaczamy liczbę punktów $\bar{X}$, których współrzędne leżą w ciele $\mathbf{F}_{q^r}$ o q^r elementach, $r = 1, 2, \ldots$. „Organizujemy" liczby N_r w funkcję generującą zwaną *funkcją zeta* X:

$$Z(t) := \exp\Big(\sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r}\Big).$$

Hipotezy Weila mówią, dla gładkiej rozmaitości X, o własnościach $Z(t)$, a także o związku z klasycznymi liczbami Bettiego „stowarzyszonej" z X rozmaitości zespolonej. Sformułowanie hipotez Weila jest treścią 1.1 – 1.4 w [H, Dodatek C] lub W1 – W5 w [M, Rozdz. VI, § 12] (obie te listy zaczynają sie od hipotezy *wymierności* funkcji zeta $Z(t)$). Tamże znajduje się więcej informacji wprowadzających w problematykę hipotez Weila. Opisana jest także historia zmagań z tymi hipotezami, w które (oprócz Weila i szkoły Grothendiecka) zaangażowani byli tacy matematycy jak: B. Dwork, J-P. Serre, S. Lubkin, S. Lang, Yu. Manin i wielu innych.

Hipotezy Weila stają się podstawową motywacją dla działalności Grothendiecka w geometrii algebraicznej w okresie jego pobytu w IHES([11]). Pracę w tym instytucie Grothendieck rozpoczyna w 1959 r. i pod jego cha-

([10]) W opublikowanym w poprzednim zeszycie *Wiadomości Matematycznych* artykule [A], M. Atiyah podkreśla ważną rolę, jaką odegrało pionierskie wprowadzenie przez Grothendiecka K-teorii do matematyki. Dzieło Grothendiecka dowodzi, że *nie ma* zasadniczej dychotomii między algebrą a geometrią — wbrew temu, co w [A] sugeruje Atiyah (warto też tu nadmienić, że inspiracje matematyczne Grothendiecka nie pochodziły z fizyki i były głównie „natury algebraicznej").

([11]) IHES = Institut des Hautes Études Scientifiques: matematyczny instytut badawczy w Bures-sur-Yvette pod Paryżem — fantastyczne miejsce do zajmowania się matematyką, także ze względu na uroczą kantynę, gdzie wina i chleba chyba nigdy nie zabraknie.

ryzmatycznym przewodnictwem zaczyna działać *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* (od nazwy lasku, w którym położony jest IHES). To seminarium stanie się przez następną dekadę światową „stolicą” geometrii algebraicznej. Grothendieck, pracując nad matematyką po 12 godzin na dobę, szczodrze dzieli się swoimi ideami matematycznymi ze współpracownikami. Atmosferę tego wyjątkowego seminarium dobrze oddaje wywiad [Du] z J. Giraud, jednym z uczniów Grothendiecka. Skoncentrujmy się na najważniejszych ideach towarzyszących Grothendieckowi w IHES(12).

Pawilon muzyki w IHES w Bures-sur-Yvette.
Tu odbywały się pierwsze seminaria z geometrii algebraicznej

Schematy to obiekty pozwalające na unifikację geometrii, algebry przemiennej i teorii liczb. Niech X będzie zbiorem, a F będzie ciałem. Rozważmy pierścień

$$F^X = \{\text{funkcje } f : X \to F\}$$

z mnożeniem „po wartościach”. Dla $x \in X$ definiujemy $\alpha_x : F^X \to F$ kładąc $f \mapsto f(x)$. Jądro α_x jest ideałem maksymalnym; to pozwala nam na identyfikację X ze zbiorem ideałów maksymalnych F^X. A więc zastępujemy X — obiekt prostszy — przez obiekt bardziej skomplikowany, jakim jest zbiór ideałów maksymalnych w F^X. Warianty tej idei pojawiały się w pracach M. Stone’a z teorii krat Boolowskich i w pracach I. M. Gelfanda o przemiennych algebrach Banacha. W algebrze przemiennej tego typu idee pojawiły się po raz pierwszy w pracach M. Nagaty i E. Kählera. Pod koniec lat pięćdziesiątych wielu matematyków w Paryżu (np. Cartan, Chevalley, Weil, . . .) intensywnie szukało uogólnienia pojęcia rozmaitości algebraicznej nad ciałem algebraicznie domkniętym.

(12) Patrz także [D], gdzie bardziej szczegółowo omówiona jest teoria schematów.

Serre pokazał, że pojęcie lokalizacji pierścienia przemiennego prowadzi do snopa nad spektrum Specm ideałów maksymalnych (dowolnego) pierścienia przemiennego. Odnotujmy, że $A \to \mathrm{Specm}(A)$ nie jest funktorem (przeciwobraz ideału maksymalnego nie musi być maksymalny). Z drugiej strony

$$A \to \mathrm{Spec}(A) := \{\text{ideały pierwsze w } A\}$$

jest funktorem. Wydaje się, że to P. Cartier w 1957 r. jako pierwszy zaproponował: przestrzeń upierścieniona $(X, \mathcal{O}_X)$ lokalnie izomorficzna ze $\mathrm{Spec}(A)$ to właściwe uogólnienie klasycznej rozmaitości algebraicznej. (Choć był to owoc spekulacji wielu geometrów algebraicznych). Taki obiekt nazwano *schematem*.

Grothendieck planował napisanie 13-tomowego wykładu geometrii algebraicznej EGA([13]) w oparciu o schematy, kończącego się dowodem hipotez Weila. Wyszły 4 tomy EGA napisane wspólnie z Dieudonné. Gwoli prawdy trzeba dodać, że duża część materiału, jaki miał się pojawić w dalszych tomach, ukazała się w SGA([14]) — publikacjach z seminarium geometrii algebraicznej w IHES. (Podręcznik [H], do którego się często odwołujemy, jest dydaktycznym streszczeniem najbardziej użytecznych wiadomości z EGA, dotyczących schematów i kohomologii).

Przejdźmy teraz do konstrukcji w geometrii algebraicznej używających funktorów reprezentowalnych. Ustalmy pewien obiekt X z kategorii $\mathcal{C}$. Stowarzyszamy z nim funktor kontrawariantny z $\mathcal{C}$ do kategorii zbiorów,

$$h_X(Y) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Na pierwszy rzut oka trudno wyobrazić sobie jakiś użytek z tak prostego przyporządkowania. Ale znajomość tego funktora wyznacza jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu) obiekt X, który go „reprezentuje” (jest to treścią *lematu Yonedy*). W związku z tym jest rzeczą naturalną przyjęcie następującej definicji. Funktor kontrawariantny z $\mathcal{C}$ do kategorii zbiorów nazywamy *reprezentowalnym* (przez X), gdy jest on postaci h_X dla pewnego obiektu X z $\mathcal{C}$. Grothendieck po mistrzowsku wykorzystuje własności funktorów reprezentowalnych do konstrukcji rozmaitych *przestrzeni parametrów*. W geometrii algebraicznej często spotykamy takie przestrzenie. Koronnym przykładem jest tu *Grassmannian* parametryzujący podprzestrzenie liniowe ustalonego wymiaru w ustalonej przestrzeni rzutowej. Naturalne jest pytanie, czy istnieją ogólniejsze schematy parametryzujące

---

([13]) EGA — *Éléments de Géométrie Algébrique*, wydane przez Publ. IHES i Springer Verlag [57–64].

([14]) SGA — *Séminaire de Géométrie Algébrique*, wydane w serii Springer Lecture Notes in Mathematics i (SGA 2) przez North-Holland [97–103].

podrozmaitości ustalonej przestrzeni rzutowej z pewnymi ustalonymi liczbowymi niezmiennikami.

Niech S będzie schematem nad ciałem k. *Rodziną domkniętych podschematów przestrzeni* $\mathbf{P}^n$ *z bazą* S bedziemy nazywali domknięty podschemat $X \subset \mathbf{P}^n \times_k S$ wraz z naturalnym morfizmem $X \to S$. Ustalmy wielomian numeryczny P. Grothendieck rozważa funktor Ψ^P z kategorii schematów do kategorii zbiorów, przyporządkowujący schematowi S zbiór $\Psi^P(S)$ płaskich rodzin domkniętych podschematów $\mathbf{P}^n$ z bazą S i wielomianem Hilberta P. Jeżeli $f : S' \to S$ jest morfizmem, to $\Psi^P(f) : \Psi^P(S) \to \Psi^P(S')$ przyporządkowuje rodzinie $X \to S$ rodzinę $X' = X \times_S S' \to S'$. Grothendieck dowodzi, że funktor Ψ^P jest reprezentowany przez schemat (zwany *schematem Hilberta*), który jest rzutowy [74](15). Jest to rezultat (bardzo) nieefektywny — na przykład ciągle otwarty jest problem, ile składowych nieprzywiedlnych mają schematy Hilberta krzywych w trójwymiarowej przestrzeni rzutowej, z ustalonym genusem i stopniem. Niemniej, w wielu rozważaniach geometrycznych wystarczy wiedzieć, że taki obiekt w ogóle istnieje, i dlatego to twierdzenie Grothendiecka znajduje wiele zastosowań. Bardziej ogólnie, Grothendieck konstruuje tzw. *Quot-schemat* parametryzujący (płaskie) snopy ilorazowe ustalonego snopa koherentnego, z ustalonym wielomianem Hilberta [73]. Quot-schemat znajduje wiele zastosowań w konstrukcji przestrzeni moduli wiązek wektorowych. Jeszcze innym schematem, skonstruowanym przez Grothendiecka w tym duchu, jest *schemat Picarda* [75, 76].

W roku 1966 Grothendieck otrzymuje Medal Fieldsa za wkład wniesiony do analizy funkcjonalnej, za twierdzenie Grothendiecka-Riemanna-Rocha i za wkład w teorię schematów (patrz [S2]).

Najważniejszym jednak tematem badań Grothendiecka w IHES jest teoria *kohomologii etalnych*. Przypomnijmy, że dla potrzeb hipotez Weila chodzi tu o skonstruowanie odpowiednika teorii kohomologii rozmaitości zespolonych dla rozmaitości algebraicznych nad ciałem dodatniej charakterystyki (ale o współczynnikach w ciele charakterystyki zero, aby można było obliczać liczby punktów stałych morfizmu jako sumy śladów na grupach kohomologii, à la Lefschetz). Niepowodzeniem zakończyły się wcześniejsze próby wykorzystania do tego celu „klasycznej" topologii używanej w geometrii algebraicznej — *topologii Zariskiego* (podzbiory domknięte = podrozmaitości algebraiczne), zbyt „ubogiej" dla potrzeb homologicznych. Grothendieck zauważa, że „dobrą" teorię kohomologii można zbudować rozważając *rozmaitość wraz z jej wszystkimi nierozgałęzionymi nakryciami* (patrz [32], gdzie opisany jest szczegółowo kontekst tego odkrycia). To jest

(15) W rzeczy samej, Grothendieck dowodzi znacznie bardziej ogólnego rezultatu dla schematów rzutowych nad bazowym schematem Noetherowskim.

początek teorii topologii etalnej rozwiniętej wspólnie z M. Artinem i J-L. Verdierem. Genialnym pomysłem Grothendiecka jest rewolucyjne uogólnienie pojęcia topologii, różniące się od klasycznej przestrzeni topologicznej tym, że „zbiory otwarte” nie zawierają się wszystkie w jednym zbiorze, ale posiadają podstawowe własności pozwalające zbudować „zadawalającą” teorię kohomologii snopów.

Alexander Grothendieck

Źródła tych idei (szkicowo) omawia następująca dyskusja Cartiera [C1]. Gdy używamy snopów na rozmaitości X lub badamy kohomologie X o współczynnikach w snopach, kluczową rolę gra krata zbiorów otwartych w X (punkty X grają rolę drugorzędną). W dyskusji tej, możemy więc „zastąpić” — bez większej szkody — rozmaitość przez kratę jej zbiorów otwartych. Pomysł Grothendiecka polega na adaptacji idei B. Riemanna, że wielowartościowe funkcje holomorficzne „żyją” tak naprawdę nie na zbiorach otwartych płaszczyzny zespolonej, ale na odpowiednich powierzchniach Riemanna, ją nakrywających (Cartier używa sugestywnego określenia «les surfaces de Riemann étalées»). Miedzy tymi powierzchniami Riemanna istnieją rzutowania i w związku z tym tworzą one obiekty pewnej kategorii. Krata jest przykładem kategorii, w której między dwoma obiektami istnieje co najwyżej jeden morfizm. Grothendieck proponuje więc zastąpić kratę zbiorów otwartych przez kategorię otwartych zbiorów etalnych. Zaadaptowana do geometrii algebraicznej ta idea rozwiązuje podstawową trudność związaną z brakiem twierdzenia o funkcjach uwikłanych dla funkcji algebraicznych; umożliwia ona także funktorialne spojrzenie na snopy etalne.

Kontynuujmy naszą dyskusję w sposób bardziej formalny. Przypuśćmy, że dana jest kategoria $\mathcal{C}$, w której istnieją produkty włókniste. Zadanie *topologii Grothendiecka* na $\mathcal{C}$ to zadanie, dla każdego obiektu $X \in \mathcal{C}$, zbioru

$\mathrm{Cov}(X)$ rodzin morfizmów $\{f_i : X_i \to X\}_{i\in I}$ nazywanych *pokryciami* X, przy czym spełnione mają być następujące warunki:

1) $\{id : X \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$;

2) jeżeli $\{f_i : X_i \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$, to otrzymana zeń, za pomocą zamiany bazy $Y \to X$, rodzina $\{X_i \times_X Y \to Y\}$ należy do $\mathrm{Cov}(Y)$;

3) jeżeli $\{X_i \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$ oraz, dla każdego i, $\{X_{ij} \to X_i\} \in \mathrm{Cov}(X_i)$, to podwójnie indeksowana rodzina $\{X_{ij} \to X\}$ należy do $\mathrm{Cov}(X)$.

Jeżeli w $\mathcal{C}$ zdefiniowane są sumy proste — załóżmy, że to ma miejsce — to rodzinę $\{X_i \to X\}$ można zastąpić jednym morfizmem

$$X' = \coprod_i X_i \to X\,.$$

Wyróżnienie pokryć pozwala mowić o snopach i ich kohomologiach. Funktor kontrawariantny F z $\mathcal{C}$ do kategorii zbiorów nazywa się *snopem zbiorów*, jeśli dla dowolnego pokrycia $X' \to X$, spełniony jest warunek

$$F(X) = \{s' \in F(X') : p_1^*(s') = p_2^*(s')\}\,,$$

gdzie p_1, p_2 są dwoma rzutami $X' \times_X X'$ na X'. *Kanoniczną topologią* w kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy „najbogatszą w pokrycia" topologię, w której wszystkie funktory reprezentowalne są snopami. Jeżeli, na odwrót, dowolny snop w topologii kanonicznej jest funktorem reprezentowalnym, to kategoria $\mathcal{C}$ nazywana jest *toposem*. Więcej informacji o topologiach Grothendiecka można znaleźć, na przykład, w [BD].

Wróćmy do geometrii. Ważne, a nawet bardzo ważne: powyższe f_i nie muszą być włożeniami! Najważniejszym przykładem topologii Grothendiecka jest *topologia etalna*, gdzie $f_i : X_i \to X$ to morfizmy etalne([16]) indukujące suriekcję $\coprod_i X_i \to X$. Zbudowana wcześniej maszyneria kohomologiczna zastosowana do tej topologii prowadzi do konstrukcji kohomologii etalnych $H^i_{\text{ét}}(X; -)$. O ile podstawowe idee są w miarę proste, o tyle sprawdzenie wielu szczegółów technicznych, dotyczących własności kohomologii etalnych, wymagało ciężkiej, wieloletniej pracy, w którą zaangażowani byli „kohomologiczni" uczniowie Grothendiecka: P. Berthelot, P. Deligne, L. Illusie, J-P. Jouanolou, J-L. Verdier i kilku innych, sukcesywnie uzupełniający szczegóły coraz to nowych rezultatów szkicowanych przez Grothendiecka. Owoce pracy szkoły Grothendiecka nad kohomologiami etalnymi są opublikowane w [100] ([17]).

([16]) Są to gładkie morfizmy relatywnego wymiaru zero. Dla rozmaitości gładkich są to morfizmy indukujące izomorfizmy na przestrzeniach stycznych we wszystkich punktach — oczywiście takie morfizmy nie muszą być monomorfizmami; ogólną dyskusję morfizmów etalnych można znaleźć w [M].

([17]) Dydaktyczny wykład kohomologii etalnych można znaleźć w [M].

Do dowodu hipotez Weila potrzebny był pewien wariant kohomologii etalnych — *kohomologie l-adyczne*. Ich podstawowe własności, a zwłaszcza *formuła typu Lefschetza*, pozwoliły dowieść Grothendieckowi kilku hipotez Weila, ale najtrudniejsza z nich — analog hipotezy Riemanna — pozostawała ciągle do udowodnienia. W jej udowodnieniu odegrał Grothendieck podobną rolę jak biblijny Mojżesz, który wyprowadził Izraelitów z Egiptu w kierunku Ziemi Obiecanej, był ich przewodnikiem przez znaczną część drogi, ale nie dane mu było osiągnąć ostatecznego celu. W przypadku hipotezy Weila-Riemanna ten cel osiągnął najzdolniejszy uczeń Grothendiecka — Deligne. (Plan Grothendiecka dowodu hipotezy Weila-Riemanna poprzez udowodnienie tzw. *hipotez standardowych* jest do dziś niezrealizowany — hipotezy te omówione są w [44]).

W roku 1970 Grothendieck przypadkowo odkrywa, że część pieniędzy na finansowanie IHES pochodzi ze źródeł wojskowych. Natychmiast odchodzi z IHES. Otrzymuje pozycję na prestiżowej College de France. Jednakże w tym momencie (ma wtedy około 42 lat) są już rzeczy, które interesują go bardziej niż matematyka: trzeba ratować zagrożony z wielu stron świat! Grothendieck współzakłada grupę ekologiczną pod nazwą *Survivre et Vivre* (*Przeżyć i żyć*). W tej grupie towarzyszą mu dwaj znakomici matematycy i przyjaciele: C. Chevalley i P. Samuel. Grupa ta wydaje w latach 1970–1975 czasopismo pod tym samym tytułem. Zgodnie ze swoim temperamentem, Grothendieck angażuje się w tę działalność bez reszty i już wkrótce jego wykłady na College de France niewiele dotyczą matematyki, a bardziej tego, jak... uniknąć wojny światowej i jak żyć ekologicznie. Skutek jest taki, że Grothendieck musi szukać sobie nowej pracy. Otrzymuje propozycję profesury na „macierzystym" uniwersytecie w Montpellier. Osiedla się wkrótce na farmie koło tego miasta i pracuje jako „szeregowy" pracownik dydaktyczny na uniwersytecie. Pracując w Montpellier, pisze kilka (długich) szkiców nowych teorii matematycznych, próbując uzyskać możliwość pracy w CNRS([18]) oraz zdolnych studentów z ENS jako swoich współpracowników. Studentów z ENS „nie otrzymuje", ale ostatnie 4 lata przed emeryturą, na którą przechodzi w wieku 60 lat, jest zatrudniony przez CNRS. Te szkice są obecnie rozwijane przez kilka grup matematyków; jest to dobry temat na oddzielny artykuł.

W Montpellier powstają też „matematyczne" pamiętniki Grothendiecka *Récoltes et Semailles* (*Zbiory i siewy*) [G1]([19]). Są tam fantastyczne fragmenty, które mówią o jego widzeniu matematyki, o pierwiastku „męskim" i „żeńskim" w matematyce i stu innych pasjonujących rzeczach. Pa-

([18]) CNRS — Centre National de la Recherche Scientifique, francuska instytucja zatrudniająca badaczy bez formalnych obowiązków dydaktycznych.

([19]) Pamiętniki te są dostępne w bibliotece IM PAN w Warszawie.

miętniki te zawierają także obszerny opis relacji Grothendiecka ze społecznością matematyczną oraz bardzo krytyczną ocenę jego byłych uczniów.... Ale porozmawiajmy o przyjemniejszych rzeczach. Mówiąc o swoim wzorcu matematyka, Grothendieck bez wahania wymienia E. Galois. I tu mamy następny polonik: na Grothendiecku w młodości duże wrażenie wywarła książka polskiego fizyka L. Infelda *Wybrańcy Bogów*, właśnie o Galois([20]). Z bardziej współczesnych matematyków, Grothendieck bardzo ciepło wspomina J. Leray'a, A. Andreotti'ego i C. Chevalley'a. Jest charakterystyczne, że dla Grothendiecka zawsze szalenie ważny jest ludzki aspekt kontaktów z innymi matematykami. Pisząc [G1] mówi:

Si dans Récoltes et Semailles je m'addresse à quelqu'un d'autre encore qu'a moi-même, ce n'est pas à un «public». Je m'y adresse à toi qui me lis comme à une p e r s o n n e, et à une personne s e u l e. Czyli, w dość swobodnym tłumaczeniu: *Jeśli w „Zbiorach i siewach" zwracam się do kogokolwiek oprócz mnie samego, to na pewno nie do „publiczności". Ja zwracam się osobiście do Ciebie, Czytelniku, i to jako do osoby indywidualnej.*

Może to trudne doświadczenie samotności, jaka towarzyszyła mu przez całe życie, uczyniło go tak wrażliwym na tym punkcie?

W roku 1988 Grothendieck odmawia przyjęcia prestiżowej Nagrody Crafoorda, którą mu przyznała, wspólnie z Deligne'em, Szwedzka Królewska Akademia Nauk (olbrzymie pieniądze!). Zacytujmy najważniejszy, według mnie, fragment listu Grothendiecka do Szwedzkiej Akademii w tej sprawie (patrz [G2]):

Je suis persuadé que la seule épreuve décisive pour la fécondité d'idées ou d'une vision nouvelles est celle du temps. La fécondité se reconnaît par la progéniture, et non par les honneurs. Czyli: *Jestem przekonany, że jedynego dowodu płodności nowych idei czy wizji dostarczy czas. Płodność rozpoznaje się po owocach, a nie poprzez zaszczyty.*

Dodajmy, że list ten zawiera także niezwykle krytyczną ocenę etyki zawodowej społeczności matematycznej lat 70-tych i 80-tych XX wieku....

Ale czas na pewne podsumowania. Oto 12 najważniejszych tematów pracy Grothendiecka w matematyce — kopiuję je po francusku z [G1], czasem dodając jakiś komentarz.

1. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.

2. Dualité «continue» et «discrète» (catégories dérivées, «six opérations»).

([20]) Znowu apel do nauczycieli: ta książka powinna być lekturą rekomendowaną (nie tylko) dla licealistów interesujących się matematyką.

3. Yoga Riemann-Roch-Grothendieck (K-théorie, relation à la théorie des intersections).

4. Schémas.

5. Topos.

(Toposy, jak to zasygnalizowaliśmy powyżej, realizują, w odróżnieniu od schematów, „geometrię bez punktów” — patrz także [C1] i [C2]. Grothendieck darzył toposy większą „miłością” niż schematy. Najwyżej cenił topologiczne aspekty geometrii, prowadzące do odpowiednich teorii kohomologii).

6. Cohomologie étale et l-adique.

7. Motifs et groupe de Galois motivique ($\otimes$-catégories de Grothendieck).

8. Cristaux et cohomologie cristalline, yoga «coefficients de De Rham», «coefficients de Hodge»...

9. «Algèbre topologique»: ∞-champs, dérivateurs; formalisme cohomologique des topos, comme inspiration pour une nouvelle algèbre homotopique.

10. Topologie modérée.

11. Yoga de géométrie algébrique anabélienne, théorie de Galois-Teichmüller.

(Ten punkt uważał Grothendieck za najtrudniejszy i „najgłębszy”. Ostatnio ważne rezultaty na ten temat uzyskał F. Pop).

12. Point de vue «schématique» ou «arithmétique» pour les polyèdres réguliers et les configurations régulières en tous genres.

(Tę tematykę rozwijał Grothendieck po przeniesieniu się z Paryża do Montpellier w wolnych chwilach od pracy na rodzinnej farmie winnej).

Wielu matematyków kontynuowało 1. — 12. i z tego powstał spory kawałek matematyki końca XX wieku. Wiele idei Grothendiecka jest aktywnie rozwijanych obecnie i z pewnością będzie miało ważny wpływ na matematykę XXI wieku.

Wymieńmy najważniejszych kontynuatorów dzieła Grothendiecka (jest wśród nich kilku medalistów Fieldsa):

1. Deligne: pełny dowód hipotez Weila w 1973 r. (w dużej mierze w oparciu o techniki SGA);

2. G. Faltings: dowód hipotezy Mordella w 1983 r.;

3. A. Wiles: dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata w 1994 r.;

(bez EGA trudno sobie wyobrazić 2. i 3.)

4. V. Drinfeld, L. Lafforgue: dowód odpowiedniości Langlandsa dla pełnej grupy liniowej nad ciałami funkcyjnymi;

5. V. Voevodsky: Teoria motywów i dowód hipotezy Milnora.([21])

Ten ostatni punkt związany jest z następującym „marzeniem" Grothendiecka: powinna istnieć „Abelianizacja" kategorii rozmaitości algebraicznych — kategoria *motywów* wraz z *kohomologiami motywicznymi*, z których dałoby się odczytać rozmaitość Picarda, grupy Chow itp. A. Suslin i V. Voevodsky skonstruowali kohomologie motywiczne spełniające postulaty Grothendiecka.

W sierpniu 1991 Grothendieck opuszcza nagle swój dom, nie informując nikogo, i udaje się w nieznane miejsce gdzieś w Pirenejach. Poświęca się filozoficznym medytacjom (wolny wybór, determinizm, a także istnienie... diabła w świecie; wcześniej napisał ciekawy tekst *La clef des songes* o tym, jak doszedł do istnienia Boga na podstawie analizy marzeń sennych). Pisze też teksty o fizyce. Nie życzy sobie kontaktów ze światem zewnętrznym.

Zmierzamy do końca. Oto garść refleksji.

Przytoczmy następujące słowa Grothendiecka z [G1] o tym, co go najbardziej fascynowało w matematyce:

C'est dire s'il y a une chose mathématique qui (depuis tojours sans doute) me fascine plus que toute autre, ce n'est ni «le nombre», ni «la grandeur», mais toujours l a f o r m e . Et parmi les mille-et-un visages que choisit la forme pour se révéler à nous, celui qui m'a fasciné plus que tout autre et continue à me fasciner, c'est l a s t r u c t u r e cachée dans les choses mathématiques. Czyli: *Jeśli istnieje jakaś rzecz w matematyce, która fascynuje mnie bardziej niż inne (i to z pewnością od zawsze), to nie jest to ani „liczba", ani żadna „wielkość", lecz raczej „forma". I pomiędzy tysiąc i jednym obliczem, jakie forma wybierze, aby nam się objawić, to które mnie fascynowało najbardziej i fascynuje nadal, to struktura ukryta w obiektach matematycznych.*

Jest doprawdy zdumiewające, że owocami tej refleksji Grothendiecka nad „formą" i „ strukturą" są teorie, które dostarczają narzędzi (o precyzji dotąd nie spotykanej) do obliczania *konkretnych* wielkości liczbowych i znajdowania *jawnych* relacji algebraicznych. W geometrii algebraicznej przykładem takiego narzędzia jest twierdzenie Grothendiecka-Riemanna-Rocha. A oto inny, mniej znany przykład. Język *λ-pierścieni Grothendiecka* [102] pozwala na traktowanie *funkcji symetrycznych* jako operatorów na wielomianach. To z kolei umożliwia jednolite podejście do szeregu klasycznych wielomianów (np. symetrycznych, ortogonalnych) i wzorów (np. interpolacyjnych czy pochodzących z teorii reprezentacji pełnej grupy liniowej i grupy symetrycznej). Te wielomiany i wzory są często związane z nazwiskami takich matematyków jak: E. Bézout, A. Cauchy, A. Cayley, P. Cze-

([21]) Szczegółowe omówienie zawartości punktów 4. i 5. można znaleźć w artykułach [L] i [CW] w *Wiadomościach Matematycznych*.

byszew, L. Euler, C.F. Gauss, C.G. Jacobi, J. Lagrange, E. Laguerre, A-M. Legendre, I. Newton, I. Schur, T.J. Stieltjes, J. Stirling, J.J. Sylvester, J.M. Hoene-Wroński i inni. Co więcej, język λ-pierścieni pozwala znajdować użyteczne algebro-kombinatoryczne uogólnienia rezultatów tych klasyków, patrz [La]. Dzieło Grothendiecka pokazuje, że nie ma zasadniczej dychotomii między „ilościowymi" i „jakościowymi" aspektami matematyki.

Niewątpliwie powyższy punkt widzenia pomógł Grothendieckowi wykonać ogromną pracę w kierunku *unifikacji* ważnych tematów geometrii, topologii, arytmetyki i analizy zespolonej. Wiąże się on też z zamiłowaniem Grothendiecka do studiowania problemów matematycznych w maksymalnej ogólności.

Styl pracy Grothendiecka dobrze oddaje następująca jego opowiastka z [G1]. Przypuśćmy, że chcemy dowieść twierdzenia, które jest hipotezą. Są 2 skrajne sposoby, aby to zrobić. Pierwszy: na siłę. Tak jak chcemy dostać się do środka orzecha: za pomocą dziadka do orzecha rozłupujemy skorupę i dostajemy się do owocu orzecha w środku. Ale jest też inny sposób. Wkładamy orzech do płynu zmiękczającego i czekamy cierpliwie jakiś czas, po czym wystarczy lekkie naciśnięcie palcem i orzech sam się otwiera. Ci wszyscy, którzy czytali prace Grothendiecka, nie mają wątpliwości, że właśnie ta druga metoda była jego metodą pracy w matematyce. Cartier [C1] podaje jeszcze bardziej sugestywną charakteryzację tej metody: jest to metoda Jozuego zburzenia murów Jerycha. Chcemy dostać się do Jerycha, strzeżonego przez wysokie mury. Jeżeli obejdziemy mury Jerycha dookoła wystarczająco wiele razy, nadwątlając (przez rezonans) ich konstrukcję, to na końcu wystarczy zadąć w trąby, wznieść gromki okrzyk i… mury Jerycha runą!

Podzielmy się następującą wskazówką dla przede wszystkim młodych matematyków. Grothendieck przywiązywał dużą wagę do spisywania swoich matematycznych rozważań. Sam proces pisania i redagowania swoich tekstów matematycznych traktował jako *integralną* część swojej twórczej pracy, patrz [He].

Oddajmy jeszcze głos Dieudonné, wiernemu świadkowi dzieła Grothendiecka, matematykowi o przeogromnej encyklopedycznej wiedzy. Napisał on (patrz [D]) w 60. rocznicę urodzin Grothendiecka (czyli około 15 lat temu):

Niewiele jest przykładów w matematyce teorii tak monumentalnej i owocnej, będącej dziełem pojedynczego człowieka w tak krótkim czasie.

Zgodnie wtórują mu edytorzy *The Grothendieck Festschrift* [C&] (gdzie ukazał się artykuł [D]), pisząc we wstępie:

Trudno jest ogarnąć w pełni rozmiar wkładu i wpływu Grothendiecka na XX-wieczną matematykę. Zmienił on sposób naszego myślenia o wielu dziedzinach matematyki. Wiele jego idei, rewolucyjnych w momencie naro-

dzenia, wydaje się obecnie tak naturalnymi, jakby były obecne w matematyce od zawsze. W rzeczy samej, istnieje cała nowa generacja matematyków, dla której idee Grothendiecka są częścią matematycznego krajobrazu, generacja, która nie potrafi sobie wyobrazić matematyki bez tego, co do niej wniósł Grothendieck.

Przygotowując ten artykuł zapytałem kilku znajomych francuskich matematyków: czy Grothendieck jeszcze żyje? Odpowiedzi, jakie otrzymałem, można streścić w sposób następujący: „Niestety jedyną wiadomością, jaką otrzymamy na temat Grothendiecka, będzie wiadomość o jego śmierci. Skoro jej nie otrzymaliśmy, to znaczy, że on żyje". 28 marca 2004 Grothendieck skończył 76 lat.

Bibliografia związana z dziełem Grothendiecka jest olbrzymia i oczywiście wykracza poza ramy tego skromnego artykułu. Cytowane są jedynie pozycje bibliograficzne, do których bezpośrednio odwołujemy się w tekście. W nich można znaleźć bardziej szczegółowe odniesienia do bibliografii Grothendiecka i literatury innych autorów, poświęconej jego osobie i jego dziełu. Gorąco rekomendujemy odwiedzanie strony internetowej:

`http://www.grothendieck-circle.org/`

Na tej stronie można znaleźć wiele ciekawych materiałów matematycznych, biograficznych i innych o Grothendiecku i jego rodzicach.

Podziękowania. Serdecznie dziękuję: Marcinowi Chałupnikowi, Pawłowi Domańskiemu i Adrianowi Langerowi za krytyczną lekturę wcześniejszych wersji tego tekstu i za cenne uwagi wzbogacające jego treść merytoryczną, Bronisławowi Jakubczykowi, Wojciechowi Pieczyńskiemu i Jerzemu Trzeciakowi za pomoc w tłumaczeniu fragmentów [C1], [G1] i [G2], Tadeuszowi Nadziei za zaproszenie do opublikowania tego artykułu w *Wiadomościach Matematycznych* oraz Janowi Krzysztofowi Kowalskiemu za pracochłonną pomoc przy jego stronie redakcyjnej.

Dziękuję także Marie-Claude Vergne za pozwolenie opublikowania zdjęcia IHES; podobne podziękowania za zdjęcia A. Grothendiecka kieruję do „The Grothendieck Circle".

Wyrazy ubolewania. Moją macierzystą instytucję, IM PAN, przepraszam, że zamiast pisać kolejną pracę typu „research" (za 10 punktów KBN) napisałem ten oto artykuł (za 0 punktów KBN), ale jakoś wydawało mi się, że powinienem go napisać.

Bibliografia

[liczba] = publikacja Grothendiecka o tym numerze z jego bibliografii w: *The Grothendieck Festschrift*, P. Cartier et al. (eds.), vol. **1**, str. xiii–xx, Progress in Mathematics **86**, Birkhäuser, Boston, 1990. Patrz także:

http://www.math.columbia.edu/∼lipyan/GrothBiblio.pdf

[A] M. Atiyah, *Matematyka w XX wieku*, Wiadom. Mat. **39** (2003), 47–63.

[B] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, vol. **1**, Warszawa, 1932.

[BS] A. Borel, J-P. Serre, *Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck)*, Bull. Soc. Math. France **86** (1958), 97–136.

[BD] I. Bucur, A. Deleanu, *Introduction to the Theory of Categories and Functors*, Wiley and Sons, London, 1968.

[C&] P. Cartier, L. Illusie, N. M. Katz, G. Laumon, Y. Manin, K. A. Ribet (eds.), *The Grothendieck Festschrift*, Progress in Mathematics **86**, Birkhäuser, Boston, 1990.

[C1] P. Cartier, *Grothendieck et les motifs*, [w:] Preprint, IHES/M/00/75.

[C2] P. Cartier, *A mad day's work: From Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry*, Bull. Amer. Math. Soc. **38** (2001), 389–408.

[CW] M. Chałupnik, A. Weber, *Motywy Vladimira Voevodskiego*, Wiadom. Mat. **39** (2003), 27–38.

[CS] P. Colmez, J-P. Serre (eds.), *Correspondance Grothendieck-Serre*, Documents Mathématiques **2**, Soc. Math. de France, Paris, 2001.

[D] J. Dieudonné, *De l'analyse fonctionnelle aux fondements de la géométrie algébrique*, [w:] „The Grothendieck Festschrift", P. Cartier et al. (eds.), vol. **1**, 1–14, Progress in Mathematics **86**, Birkhäuser, Boston, 1990.

[Du] E. Dumas, *Une entrevue avec Jean Giraud, à propos d'Alexandre Grothendieck*, Le journal de maths **1** no. 1 (1994), 63–65.

[G1] A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles; Réflexions et témoignages sur un passé de mathématicien*, Preprint, Université des Sciences et Techniques du Languedoc (Montpellier) et CNRS, 1985.

[G2] A. Grothendieck, *Les dérives de la «science officielle»*, Le Monde, Paris, 4.05.1988 (patrz także: Math. Intelligencer **11** no. 1 (1989), 34–35).

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. **52**, Springer, New York, 1977.

[He] A. Herreman, *Découvrir et transmettre*, [w:] Preprint IHES/M/00/75.

[L] A. Langer, *Program Langlandsa według Lafforgue'a*, Wiadom. Mat. **39** (2003), 39–46.

[La] A. Lascoux, *Symmetric functions and combinatorial operators on polynomials*, CBMS Reg. Conf. Ser. in Math. **99**, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.

[LP] J. Lindenstrauss, A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275–326.

[Ma] R.D. Mauldin (ed.), *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café*, Birkhäuser, Boston, 1981.

[M] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1980.

[P] A. Pełczyński, *List do autora*, 20.03.2004.

[PB] P. Pérez Carreras, J. Bonet, *Barrelled Locally Convex Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[S1] J-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. **61** (1955), 197–278.

[S2] J-P. Serre, *Rapport au comité Fields sur les travaux de A. Grothendieck*, K-theory **3** (1989), 199–204.

[W] A. Weil, *Number of solutions of equations over finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 497–508.

Piotr Pragacz
Instytut Matematyczny PAN
Śniadeckich 8
00-956 Warszawa
e-mail: P.Pragacz@impan.gov.pl