FUNKTORY SCHUBERTA

Piotr Pragacz

(Zakład Algebry i Geometrii Algebraicznej)

Na podstawie pracy:

W. Kraśkiewicz, P. Pragacz, *Schubert functors and Schubert polynomials,*

European Journal of Combinatorics, 25/8 (2004), 1327–1344.

1 Funktory Schura

Dysertacja Issaia Schura (Berlin, 1901): klasyfikacja nieprzywiedlnych reprezentacji wielomianowych GL_n:

Homomorfizmy $GL_n \to GL_N$ posyłające X na macierz $[P_{ij}(X)]$, gdzie P_{ij} jest wielomianem od wyrazów X.

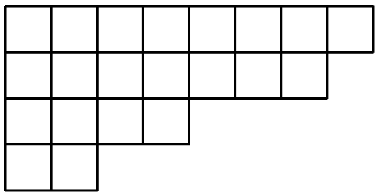
Dwa działania na $E^{\otimes n}$:

– grupy symetrycznej S_n przez permutacje czynników,

– działanie diagonalne $GL(E)$.

Reprezentacje nieprzywiedlne S^I grupy symetrycznej S_n parametryzowane są podziałami liczby n.

Podział liczby n: $I = (i_1 \geq \cdots \geq i_k \geq 0)$ t.ż. $i_1 + \cdots + i_k = n$. Przedstawienie graficzne dla 8742:



Moduł Schura:

$$V_I(E) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[S_n]}(S^I, E^{\otimes n})$$

$V_I(-)$ jest *funktorem*: jeśli E, F są R-modulami, $f : E \to F$ jest R-homomorfizmem to f indukuje R-homomorfizm $V_I(E) \to V_I(F)$. W ten sposób otrzymujemy wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje wielomianowe GL_n.

Ponumerujmy kratki diagramu liczbami $1, \ldots, n$.

1	15	19	3	10	5	21	13
11	8	18	9	6	17	4	
7	20	12	16				
16	2						

P:= suma permutacji zachowujących wiersze $(P \in \mathbb{Z}[S_n])$.

N:= suma permutacji wraz ze znakami zachow. kolumny.

$$e(I) := N \circ P \text{ – idempotent Younga};$$

$$V_I(E) = e(I)E^{\otimes n}.$$

Np. $V_{(n)}(E) = S^n(E)$, $V_{1,\ldots,1}(E) = \wedge^n(E)$.

Niech T będzie podgrupą macierzy diagonalnych w GL_n:

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & 0 \\ & & x_3 & \\ & 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

Rozważmy działanie T na $V_I(E)$ indukowane z działania GL_n przez obcięcie. **Główny wynik dysertacji Schura:** *Ślad działania T na $V_I(E)$ jest równy*

$$\det\left(s_{i_p-p+q}(x_1, \ldots, x_n)\right)_{1 \le p,q \le k} =: s_I(x_1, \ldots, x_n),$$

gdzie $s_i(x_1, \ldots, x_n)$ jest zupełną funkcją symetryczną stopnia i; $s_I(x_1, \ldots, x_n)$ – *funkcja Schura.*

2 Wielomiany Schuberta

Permutacja: bijekcja $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bedąca identycznoscią poza zbiorem skończonym.

$A := \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$.

Definiujemy $\partial_i : A \to A$

$$\partial_i(f) := \frac{f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots) - f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots)}{x_i - x_{i+1}}.$$

Dla odbicia prostego $\tau_i = 1, \ldots, i-1, i+1, i, i+2, \ldots$, przyjmujemy $\partial_{\tau_i} := \partial_i$.

Niech $\mu = \sigma_k \circ \cdots \circ \sigma_1 = \pi_k \circ \cdots \circ \pi_1$ bedą dwoma zredukowanymi rozkładami μ na odbicia proste. Wtedy

$$\partial_{\sigma_k} \circ \cdots \circ \partial_{\sigma_1} = \partial_{\pi_k} \circ \cdots \circ \partial_{\pi_1}.$$

Zatem dla każdej permutacji μ, możemy zdefiniować ∂_μ jako $\partial_{\sigma_k} \circ \cdots \circ \partial_{\sigma_1}$ niezależnie od rozkładu zredukowanego μ.

Niech n będzie liczbą naturalną taką że $\mu(k) = k$ dla $k > n$.

Wielomian Schuberta (Lascoux-Schützenberger 1982):

$$X_\mu := \partial_{\mu^{-1} \circ \omega_n}(x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}^1 x_n^0)$$

gdzie ω_n jest permutacją $(n, n-1, \ldots, 2, 1), n+1, n+2, \ldots$.

Definujemy k-ty *zbiór inwersji* μ:

$$I_k(\mu) := \{l : l > k,\ \mu(k) > \mu(l)\} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Kod μ: ciąg liczb $i_k = |I_k(\mu)|$, $k = 1, 2, \ldots$.

Kod $5, 2, 1, 6, 4, 3, 7, 8, \ldots$, jest równy $(4, 1, 0, 2, 1, 0, \ldots)$.

– Wielomian Schuberta X_μ jest symetryczny wzgledem x_k i x_{k+1} wtedy i tylko wtedy gdy $\mu(k) < \mu(k+1)$ (lub równowaznie $i_k \leq i_{k+1}$).

– Gdy $\mu(1) < \mu(2) < \cdots < \mu(k) > \mu(k+1) < \mu(k+2) < \cdots$ (lub $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$, $0 = i_{k+1} = i_{k+2} = \cdots$), to X_μ jest równy $s_{i_k,\ldots,i_2,i_1}(x_1, \ldots, x_k)$.

– Gdy $i_1 \geq i_2 \geq \cdots$, to $X_\mu = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots$ jest jednomianem.

Gdy zbiory $I_k(\mu)$ tworzą łancuch (ze względu na inkluzję), to μ nazywamy permutacją *vexilarną* .

Twierdzenie 1 *(Lascoux-Schützenberger, Wachs) Jesli* μ *permutacją vexilarną z kodem* $(i_1, i_2, ..., i_n > 0, 0 \ldots)$, *to* $X_\mu = s_{(i_1,\ldots,i_n)^{\geq}}\,(\min I_1(\mu) - 1, \ldots, \min I_n(\mu) - 1)^{\leq}$.

Flagowa funkcja Schura: Dla dwóch ciagów liczb naturalnych, $i_1 \geq \cdots \geq i_k$ oraz $0 < b_1 \leq \cdots \leq b_k$,

$$s_{i_1,\ldots,i_k}(b_1, \ldots, b_k) := \det\left(s_{i_p-p+q}(x_1, \ldots, x_{b_p})\right)_{1\leq p,q\leq k}$$

3 Funktory Schuberta

R – przemienna $\mathbb{Q}$-algebra, $E. : E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ dowolna flaga R-modulow. Załóżmy, że $\mathcal{I} = [i_{k,l}]$, $k, l = 1, 2, \ldots$, jest macierzą zer i jedynek t.ż.

– $i_{k,l} = 0$ dla $k \geq l$;

– $\sum_l i_{k,l}$ jest skończona dla każdego k;

– $\mathcal{I}$ ma skończoną liczbę niezerowych wierszy.

Taka macierz $\mathcal{I}$ nazywamy *kształtem*:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ & & & \ldots\ldots & & & & & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \times & 0 & \times & 0 \\ & & & \times & 0 & \times \\ & & & & \times & 0 \\ & & & & & 0 \end{array}$$

Niech $i_k := \sum_{l=1}^{\infty} i_{k,l}$, $\widetilde{i}_l := \sum_{k=1}^{\infty} i_{k,l}$. Definiujemy $S_{\mathcal{I}}(E.)$ jako obraz

$$\Phi_{\mathcal{I}}(E.) : \bigotimes_k S_{i_k}(E_k) \xrightarrow{\Delta_S} \bigotimes_k \bigotimes_l S_{i_{k,l}}(E_k) \xrightarrow{m_\wedge} \bigotimes_l \bigwedge^{\widetilde{i}_l} E_l$$

$S_{\mathcal{I}}(-)$ jest *funktorem*: gdy $E.$ i $F.$ są flagami R-modulow, $f : \bigcup_n E_n \to \bigcup_n F_n$ jest R-homomorfizmem t.ż. $f(E_n) \subset F_n$, to f indukuje R-homomorfizm $S_{\mathcal{I}}(E.) \to S_{\mathcal{I}}(F.)$.

Kształt permutacji μ to macierz:

$$\mathcal{I}_\mu = [i_{k,l}] := [\chi_k(l)]\,,\ k,l = 1,2,\ldots$$

gdzie χ_k jest funkcją charakterystyczną $I_k(\mu)$. Np. dla $\mu = 5,2,1,6,4,3,7,8,\ldots$, kształt $\mathcal{I}_\mu$ jest równy

$$\begin{array}{ccccc}
\times & \times & 0 & \times & \times \\
 & \times & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \times & \times \\
 & & & & \times
\end{array}$$

Definiujemy $S_\mu(E.)$–*modul Schuberta* stowarzyszony z permutacją μ i flagą $E.$ jako $S_{\mathcal{I}_\mu}(E.)$; to prowadzi do *funktora Schuberta* $S_\mu(-)$.

Niech od teraz, $E.$ bedzie flagą przestrzeni wektorowych z

$$\dim E_i = i\,.$$

Niech B bedzie grupą (Borela) liniowych endomorfizmów $E := \bigcup E_i$, które zachowują $E.$. Użyte w definicji $S_\mu(E.)$ moduły są $\mathbb{Z}[B]$-modułami zaś przekształcenia są $\mathbb{Z}[B]$-modułowe. $S_{\mathcal{I}}(E.)$ jest *cyklicznym* $\mathbb{Z}[B]$-modułem generowanym przez nastepujący element. Niech $\{e_i : i = 1,2,\ldots\}$ będzie taką bazą E że $e_1, e_2, \ldots, e_k$ rozpinają E_k.

Np. $S_{5,2,1,6,4,3,7,\ldots}(E.)$ jest generowany nad $\mathbb{Z}[B]$ przez

$$e_1 \otimes e_1 \wedge e_2 \otimes e_1 \wedge e_4 \otimes e_1 \wedge e_4 \wedge e_5\,.$$

Niech T bedzie grupą macierzy diagonalnych w B.

Twierdzenie 2 *(K-P) Ślad działania T na module Schuberta $S_{\mathcal{I}}(E.)$ jest równy wielomianowi Schuberta X_μ.*

O dowodzie: studiujemy własności multiplikatywne modułów Schuberta.

$\tau_{p,q}$ – transpozycja p-tego i q-tego miejsca.

Formuła Chevalleya-Monka na mnożenie przez X_{τ_k}:

$$X_\mu \cdot (x_1 + \cdots + x_k) = \sum X_{\mu \circ \tau_{p,q}},$$

gdzie suma przebiega po p, q t.z. $p \leq k$, $q > k$ oraz $l(\mu \circ \tau_{p,q}) = l(\mu) + 1$. Na przykład:

$$X_{246315879\ldots} \cdot (x_1 + x_2) = X_{346215879\ldots} + X_{264315879\ldots} + X_{256314879\ldots}$$

Formuła przejścia: Niech (j, s) będzie parą dodatnich liczb całkowitych t.ż.

– $j < s$ and $\mu(j) > \mu(s)$,

– dla każdego $i \in]j, s[$, $\mu(i) \notin [\mu(s), \mu(j)]$,

– dla ka z dego $r > j$, gdy $\mu(s) < \mu(r)$ to istnieje $i \in]j, r[$ t.z. $\mu(i) \in [\mu(s), \mu(r)]$.

Wówczas $\quad X_\mu = X_\lambda \cdot x_j + \sum X_{\psi_t}$,

gdzie $\lambda = \mu \circ \tau_{j,s}$, $\psi_t = \mu \circ \tau_{j,s} \circ \tau_{k_t,j}$, a suma po k_t t.ż.

– $k_t < j$ oraz $\mu(k_t) < \mu(s)$,

– gdy $i \in]k_t, j[$ to $\mu(i) \notin [\mu(k_t), \mu(s)]$.

Taka para (j, s) zawsze istnieje dla nietrywianej permutacji: wystarczy wziaść maksymalną w porządku leksykograficznym parę t.ż. $\mu(j) > \mu(s)$.

Np. $X_{521863479} =$

$= X_{521843679\ldots} \cdot x_5 + X_{524813679\ldots} + X_{541823679\ldots}$

– przejście maksymalne

$= X_{521763489\ldots} \cdot x_4 + X_{527163489\ldots} + X_{571263489\ldots} + X_{721563489\ldots}$

$= X_{512864379\ldots} \cdot x_2.$

Dowodzimy, że dla przejścia maksymalnego istnieje filtracja $\mathbb{Z}[B]$-modulow

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F} = S_\mu(E.)$$

wraz z izomorfizmami $\mathcal{F}/\mathcal{F}_k \simeq S_\lambda(E.) \otimes E_j/E_{j-1}$ oraz $\mathcal{F}_t/\mathcal{F}_{t-1} \simeq S_{\psi_t}(E.)$ dla $t = 1, \ldots, k$. $\square$

Istnieją *flagowe funktory Schura* $S_I(-)$, dla których zachodzi

Twierdzenie 3 *(K-P) Jesli μ jest permutacją vexilarną z kodem $(i_1, i_2, ..., i_n > 0, 0 \ldots)$, to* $S_\mu(E.) = S_{(i_1,\ldots,i_n)^\geq}\left(E_{\min I_1(\mu)-1}, \ldots, E_{\min I_n(\mu)-1}\right)^{\leq}.$