Kamil Szpojankowski
Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Charakteryzacje regresyjne w niekomutatywnej probabilistyce

Wiele charakteryzacji zmiennych losowych, znanych w klasycznej probabilistyce, ma swoje odpowiedniki w wolnej probabilistyce. Przykładem takiej analogii jest twierdzenie Bernsteina, charakteryzujące niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie normalnym, przez niezależność zmiennych $X - Y$, oraz $X + Y$. Jego odpowiednik w wolnej probabilistyce [3] brzmi: *wolne zmienne losowe* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *mają rozkład Wignera wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne* $\mathbb{X} - \mathbb{Y}$ *oraz* $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ *są wolne.*

Jednym z najbardziej znanych twierdzeń charakteryzujących rozkłady zmiennych losowych jest twierdzenie Lukacsa, mówiące, że jeżeli dodatnie, niezdegenerowane, zmienne losowe X, Y są niezależne, to zmienne

$$U = \frac{X}{X+Y}, \quad V = X + Y, \tag{1}$$

są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy X oraz Y mają rozkłady gamma, z tym samym parametrem skali.

W odpowiedniku powyższego twierdzenia w wolnej probabilistyce rolę rozkładu gamma gra rozkład Marchenko-Pastur (wolny rozkład Poissona). W [2] udowodnione zostało, że jeżeli zmienne $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ są wolne oraz zmienne

$$\mathbb{U} = (\mathbb{X} + \mathbb{Y})^{-1/2}\mathbb{X}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})^{-1/2}, \quad \mathbb{V} = \mathbb{X} + \mathbb{Y},$$

są wolne, to $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ mają rozkłady Marchenko-Pastur.

Zauważmy, że w (1), $X = UV$ oraz $Y = V(1 - U)$. W pracy [1] autorzy rozważają schemat regresyjny, dualny do twierdzenia Lukacsa. Jeżeli zmienne U, V są niezależne, to

$$\mathbb{E}\big((V(1-U))^k|UV\big) = c, \quad \mathbb{E}\big((V(1-U))^l|UV\big) = d,$$

dla pary (k, l), będącej jedną z par $\{(1,2), (-1,1), (-1,-2)\}$ oraz $c, d \in \mathbb{R}$, wtedy i tylko wtedy, gdy U ma rozkład beta, oraz V ma rozkład gamma.

W referacie przedstawione zostaną wyniki, będące analogami powyższego twierdzenia w wolnej probabilistyce.

Bibliografia

[1] K. Bobecka, J. Wesołowski, *Three dual regression schemes for the Lukacs theorem*, Metrika, 56 (2002), 43–54.
[2] M. Bożejko, W. Bryc, *On a class of free Lévy laws related to a regression problem*, J. Funct. Anal. 236 (2006), 59–77.
[3] A. Nica, *R-transforms of free joint distributions and non-crossing partitions*, J. Funct. Anal. 135 (1996), 271–296.