Bartosz Kołodziejek
Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Twierdzenie Lukacsa na stożkach symetrycznych

Lukacs [4] udowodnił, że jeśli X i Y są niezależnymi, dodatnimi oraz niezdegenerowanymi zmiennymi losowymi takimi, że ich suma V oraz iloraz U również są niezależne, to X i Y mają rozkład gamma z tym samym parametrem skali. Twierdzenie to posiada wiele uogólnień, a najbardziej znane dla wielowymiarowych zmiennych losowych pochodzą pochodzą od Olkina i Rubina [4] oraz Casalis i Letac [2], gdzie autorzy rozszerzyli charakteryzację odpowiednio na stożek macierzy dodatnio określonych oraz ogólnie na stożki symetryczne. Istnieje wiele sposobów definiowania ilorazu elementów ze stożka. W powyższych pracach rozważano ogólną formę ilorazu $U = [w(X+Y)]^{-1}X[w^T(X+Y)]^{-1}$, gdzie w jest takie, że $w(a)w^T(a) = a$ dla każdego elementu a ze stożka. Dodano jednak silne założenie o niezmienniczości rozkładu ilorazu.

Aby uniknąć tego założenia, Bobecka i Wesołowski [1] rozwinęli nowe podejście oparte na gęstościach zmiennych losowych X oraz Y. Zakładając istnienie ściśle dodatnich, dwukrotnie różniczkowalnych gęstości na stożku rzeczywistych dodatnio określonych macierzy, udowodnili charakteryzację rozkładu Wisharta dla ilorazu zdefinowanego wzorem $U = (X+Y)^{-1/2}X(X+Y)^{-1/2}$, gdzie $A^{1/2}$ oznacza symetryczny pierwiastek macierzy A.

W referacie zostaną przedstawione wyniki własne, w których kontynuowano te prace i osłabiono techniczne założenie gładkościowe na gęstości do ich ciągłości. Pokażemy rozwiązanie równania funkcyjnego Olkina-Bakera na stożkach symetrycznych, a także wykorzystane techniki, w tym wykorzystanie słynnego twierdzenia Gleasona, które pozwala podać postać rozwiązania addytywnego równania Cauchy'ego określonego na wzajemnie ortogonalnych projekcjach wymiaru różnego od 2.

Bibliografia

[1] K. Bobecka and J. Wesołowski. The Lukacs–Olkin–Rubin theorem without invariance of the "quotient". *Studia Math.*, 152(2):147–160, 2002.
[2] M. Casalis and G. Letac. The Lukacs–Olkin–Rubin characterization of Wishart distributions on symmetric cones. *Ann. Statist.*, 24:763–786, 1996.
[3] E. Lukacs. A characterization of the gamma distribution. *Ann. Math. Statist.*, 26:319–324, 1955.

[4] I. Olkin and H. Rubin. A characterization of the Wishart distribution. *Ann. Math. Statist.*, 33:1272–1280, 1962.