**Paweł Przybyłowicz**
Akademia Górniczo Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
**Paweł Morkisz**
Akademia Górniczo Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

# Zrandomizowany algorytm Eulera dla aproksymacji rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych

Rozpatrujemy punktową aproksymację rozwiązań skalarnych stochastycznych równań różniczkowych postaci:

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t)dW(t), \quad t \in [0, T], \\ X(0) = \eta, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie warunek początkowy $\eta$ jest niezależny od jednowymiarowego procesu Wienera $W$ oraz $\mathbb{E}|\eta|^q < +\infty$ dla wszystkich $q \geq 1$. Zakładamy, że współczynnik $a : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją Carathéodory'ego, to znaczy, że dla wszystkich $y \in \mathbb{R}$, $a(\cdot, y) : [0, T] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i mierzalna oraz dla dowolnych $t \in [0, T]$, $a(t, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest Lipschitzowsko ciągła w $\mathbb{R}$. O współczynniku $b : [0, T] \to \mathbb{R}$ zakładamy, że jest kawałkami Hölderowsko ciągła w $[0, T]$ z wykładnikiem $\varrho \in (0, 1]$.

Znanym faktem jest, że przy takich założeniach o $a$ nie ma zbieżności dla klasycznego algorytmu Eulera w modelu błędu najgorszego przypadku, jeśli obliczamy wartości funkcji $a = a(t, y)$, ze względu na zmienną czasową $t$, tylko w punktach danych w sposób deterministyczny. Problem ten może być rozwiązany za pomocą algorytmów typu Monte Carlo. Konstruujemy zrandomizowany algorytm Eulera $X^{RE}$, który oblicza wartości funkcji $a$ w losowo wybranych punktach.

Dla algorytmu $X^{RE}$ pokazujemy, że

$$\left(\mathbb{E}|X(T) - X^{RE}(T)|^q\right)^{1/q} = O(n^{-\min\{1/2, \varrho\}}), \; q \in [1, +\infty), \tag{2}$$

gdzie $n$ jest liczbą punktów dyskretyzacji przedziału $[0, T]$. Korzystając z wyników zawartych w artykułach [1] oraz [3], pokazujemy, że w przypadku $q = 2$ ograniczenie (2) jest optymalne.

Zostanie zaprezentowany również przykład numeryczny, który potwierdza uzyskane wyniki teoretyczne.

## Bibliografia

[1] N. S. Bakhvalov, On approximate calculation of integrals (in Russian), Vestnik MGV, Ser. Mat. Mekh. Aston. Fiz. Khim. **4** (1959), 3–18,
[2] A. Jentzen, A. Neuenkirch, A random Euler scheme for Carathéodory differential equations, J. Comp. and Appl. Math. **224** (2009), 346–359,
[3] P. Przybyłowicz, Adaptive Itô–Taylor algorithm can optimally approximate the Itô integrals of singular functions, J. Comp. and Appl. Math. **235** (2010), 203–217.
[4] P. Przybyłowicz, P. Morkisz, The Monte Carlo Euler algorithm for approximation of stochastic differential equations with time–irregular coefficients.