Tomasz Bojdecki
Uniwersytet Warszawski

Oscylujący ułamkowy ruch Browna i błądzenia na grupie hierarchicznej

Wyniki przedstawione w komunikacie zostały uzyskane wspólnie z Anną Talarczyk i Luisem Gorostizą i są zawarte w pracy [1].

Przypomnijmy, że ułamkowy ruch Browna (fBm) i podułamkowy ruch Browna (sfBm) z parametrem Hursta $H \in (0,1)$ są scentrowanymi, ciągłymi procesami Gaussa o funkcjach kowariancji, odpowiednio,

$$\frac{1}{2}\left(s^{2H}+t^{2H}-|s-t|^{2H}\right), \quad s,t \geq 0$$

oraz

$$s^{2H}+t^{2H}-\frac{1}{2}\left(|s-t|^{2H}+(s+t)^{2H}\right) \quad s,t \geq 0.$$

Procesy te pojawiają się m.in. jako granice fluktuacji czasów przebywania nieskończonych układów cząstek w $\mathbb{R}^d$ wykonujących niezależne standardowe ruchy stabilne (np. [2]). Ich "oscylujące" odpowiedniki, oscylujący ułamkowy ruch Browna (ofBm) i oscylujący podułamkowy ruch Browna (osfBm), to znowu scentrowane procesy Gaussa o funkcjach kowariancji, odpowiednio

$$\frac{1}{2}\left(s^{2H}h_s+t^{2H}h_t-|s-t|^{2H}h_{|s-t|}\right), \quad s,t \geq 0$$

oraz

$$s^{2H}h_s+t^{2H}h_t-\frac{1}{2}\left(|s-t|^{2H}h_{|s-t|}+(s+t)^{2H}h_{s+t}\right) \quad s,t \geq 0,$$

gdzie h jest pewną funkcją określoną na $(0,\infty)$, $0<C_1<h_t<C_2<\infty$, taką że $h_t = h_{at}$ dla pewnej stałej $a \in (0,1)$. Okazuje się, że takie procesy otrzymuje się, dla $H > \frac{1}{2}$, przy badaniu czasów przebywania błądzeń na grupach hierarchicznych.

Grupą hierarchiczną rzędu M (M jest liczbą naturalną > 1) jest

$$\Omega_M = \{x=(x_1,x_2,\ldots), x_i \in \{0,1,,\ldots,M-1\}, \sum_i x_i < \infty\}$$

z dodawaniem po współrzędnych mod M i metryką $|x-y| = \max\{i : x_i \neq y_i\}$ lub $= 0$, gdy $x = y$. Ma ona własność: $|x-y| \leq \max(|x-z|,|z-y|)$,

$x, y, z \in \Omega_M$, czyli Ω_M jest tzw. przestrzenią ultrametryczną (w szczególności dwie kule mogą być tylko albo rozłączne albo jedna jest zawarta w drugiej). Takie przestrzenie pojawiają się np. w modelach genetyki populacji.

Ustalmy $0 < c < M$. c-błądzeniem na Ω_M nazywamy proces stochastyczny zdefiniowany następująco: będąc w stanie $x \in \Omega_M$ wybieramy liczbę $j = 1, 2, \ldots$ z prawdopodobieństwem $(1 - \frac{c}{M})(\frac{c}{M})^{j-1}$ i po czasie wykładniczym z parametrem 1 przeskakujemy na sferę o środku x i promieniu j z prawdopodobieństwem rozłożonym jednostajnie na tej sferze. Takie procesy okazują się być pod wieloma względami odpowiednikami procesów stabilnych w $\mathbb{R}^d$.

Przypuśćmy, że w chwili początkowej w każdym $x \in \Omega_M$ znajduje się θ_x cząstek, gdzie $\{\theta_x\}_{x \in \Omega_M}$ są i.i.d. Cząstki te wykonują następnie niezależne c-błądzenia. Ewolucja układu jest opisana przez proces empiryczny N, gdzie $N_t(A) =$ liczba cząstek w zbiorze $A \subset \Omega_M$ w chwili t. Dla $T > 0$ definiujemy proces fluktuacji czasów przebywania

$$X_T(t) = \frac{1}{F_T} \int_0^{Tt} (N_r - EN_r) dr,$$

gdzie F_T jest deterministycznym normowaniem i pytamy o granicę wg. rozkładów, gdy $T \to \infty$.

Oznaczmy $a = \frac{c}{M}$, $\gamma = \log_{\frac{1}{a}} c$, $b = \frac{M^2 - c}{M(M-1)}$.

Twierdzenie *Załóżmy $c < 1$ i niech $F_T = T^{\frac{1-\gamma}{2}}$. Wówczas, dla dowolnej $\varphi : \Omega_M \mapsto \mathbb{R}$ o nośniku ograniczonym i $T_n = a^{-n}$,*
(i) jeśli θ_x ma rozkład Poissona, to

$$\langle X_{T_n}, \varphi \rangle \Rightarrow K \xi^H \sum_{x \in \Omega_M} \varphi(x), \quad n \to \infty,$$

gdzie ξ^H jest ofBm z $H = \frac{1-\gamma}{2}$ i $h_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (ba^j t)^{-2H} (e^{-ba^j t} - 1 + ba^j t)$;
(ii) jeśli $\theta_x = 1$, to zbieżność też zachodzi z tymi samymi H i h, ale teraz ξ^H jest osfBm.
$\Rightarrow$ oznacza zbieżność według rozkładów w $C([0, \tau])$ dla dowolnego $\tau > 0$.

Bibliografia

[1] T. Bojdecki, L.G. Gorostiza, A. Talarczyk, Oscillatory fractional Brownian motion and hierarchical random walks, Preprint arXiv:1201.5084v1
[2] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., Talarczyk, A.: Limit theorems for occupation time fluctuations of branching systems I: Long-range dependence. Stoch. Proc. Appl. 116, 1-18 (2006)