Dawid Czapla
Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego
Katarzyna Horbacz
Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego

Zastosowanie e-własności w kontekście techniki sprzęgania łańcuchów Markowa

Celem referatu będzie przedstawienie pewnej metody badania asymptotycznej stabilności łańcuchów Markowa opartej na zastosowaniu idei *e-własności* ([7]) w kontekście technik *sprzęgania* oraz *rozrywania przestrzeni fazowej*.

Niech $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa o funkcji przejścia P i przestrzeni fazowej X. Punkt wyjścia naszych rozważań stanowi rezultat nawiązujący do klasycznego wyniku z teorii łańcuchów Harrisa. Otóż wiadomo ([4]), że p.n., jeżeli łańcuch $\mathbb{X}$ powraca do zbioru A nieskończenie wiele razy oraz zbiór B jest *jednostajnie osiągalny* ze zbioru A, to liczba powrotów tego łańcucha do zbioru B jest również nieskończona. W szczególności, jeżeli A jest jednostajnie osiągalny z całej przestrzeni X, to

$$\mathbb{P}_x(\eta_B = \infty) = 1 \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

W oparciu o [1,5] dowodzimy, iż przy odpowiednim wzmocnieniu komunikacji między zbiorami A i B zachodzi równość:

$$\mathbb{P}_x(\kappa_B < \infty) = 1 \quad \text{dla} \quad x \in X,$$

gdzie

$$\kappa_B = \inf\{n \in \mathbb{N} : \; X_k \in B \quad \text{dla} \quad k \geq n\}.$$

Rezultat ten wykorzystamy w odniesieniu do odpowiedniego łańcucha sparowanego i rozerwanego między dwiema kopiami przestrzeni X^2. Przypuśćmy, że dane jest odwzorowanie $S : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

(i) $S(\cdot, C)$ jest funkcją borelowską przy ustalonym C a $S(x, y, \cdot)$ miarą skończoną przy ustalonym (x, y);

(ii) $S(x, y, A \times X) \leq P(x, A)$ oraz $S(x, y, X \times A) \leq P(y, A)$.

Ponadto zakładamy, że zachodzi warunek związany z wyrażeniami postaci

$$\int_{X_2} (f(u) - f(v)) \, S^n(x, y, du, dv),$$

gdzie f jest ograniczoną funkcją Lipschitzowską, dający pewną namiastkę e-własności dla łańcucha $\mathbb{X}$. Wówczas, można skonstruować taki łańcuch Markowa $(X_n, Y_n, \theta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, gdzie $\theta \in \{0, 1\}$, że

$$\mathbb{B}(X_{n+1} \in A | X_n = x, \, Y_n = y) = P(x, A),$$

$$\mathbb{B}(Y_{n+1} \in A | X_n = x,\, Y_n = y) = P(y, A) \quad \text{dla} \quad A \in \mathcal{B}(X)$$

oraz

$$\mathbb{B}(X_{n+1} \in C,\, \theta = 1 | X_n = x,\, Y_n = y) = S(x, y, C) \quad \text{dla} \quad C \in \mathcal{B}(X^2).$$

Po dokonaniu pewnych dodatkowych założeń względem funkcji S i zastosowaniu wspomnianego na początku rezultatu do zmiennej $\kappa_{X^2 \times \{1\}}$, wnosimy, że

$$\mathbb{B}_{x,y}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\theta_k = 1\}\Big) = 1 \quad \text{dla} \quad (x, y) \in X^2.$$

Bazując na tym stwierdzeniu i wykorzystując specyfikę składnika S otrzymujemy wyniki związane ze stabilnością łańcucha Markowa $\mathbb{X}$.

Bibliografia

[1] R. Kapica, M. Ślęczka, *Random Iteration with place dependent probabilities*, arXiv:1107.0707v2, submitted, 2012.

[2] A. Lasota, T. Szarek, *Lower bound technique in the theory of a stochastic differential equation*, J. Differential Equations 231 (2006), 513-–533.

[3] A. Lasota, J. Yorke, *Lower bound technique for Markov operators and iterated function systems*, Random Comput. Dynam. 2 (1994), 41-77.

[4] S. P. Meyn and R. L. Tweedie, *Markov chains and stochastic stability*, Springer-Verlag, London, 1993.

[5] C. Odasso, *Exponential mixing for stochastic PDEs: the non-additive case*, Probab. Theory Rel. Fields 140 (2008), 41-82.

[6] D. Revuz, *Markov Chains*, North-Holland Elsevier, Amsterdam, 1975.

[7] T. Szarek, *Feller processes on nonlocally compact spaces*, Ann. Probab. 34 (2006), 1849—1863.