Adam Paszkiewicz
Uniwersytet Łódzki

O zbiorach mniejszych niż miary zero

Niech ϵ będzie zbiorem ciągów liczb dodatnich $\epsilon = \{\epsilon^k : k \in K\}$, $\epsilon^k = (\epsilon_1^k, \epsilon_2^k, \dots)$, $\epsilon_n^k > 0$. Oznaczamy przez $\mathcal{M}_\epsilon$ rodzinę zbiorów $B \subset \mathbb{R}$ o własności: istnieją przedziały P_n^k o długościach $|P_n^k| = \epsilon_n^k$ spełniające $B \subset \bigcup_{n\geq 1} P_n^k$ dla każdego $k \in K$. Jeśli tylko $\inf \sum_{n\geq 1} \epsilon_n^k = 0$, to $\mathcal{M}_\epsilon$ jest zawarte w ideale $\mathcal{N}$ zbiorów B miary Lebesgue'a $\lambda(B) = 0$. Wskażemy wiele trudnych pytań dotyczących rodzin $\mathcal{M}_\epsilon$. Niezbędny okazuje się rozwój specjalnych technik. Najogólniej mówiąc, można je łączyć z konstrukcją zbioru Cantora. Jak sądzimy przykładem trudnego pytania jest

Hipoteza 1. *Istnieje zbiór $B \subset (0, \infty)$ taki, że $B \in \mathcal{M}_{\{\epsilon^k : k\in\mathbb{N}\}}$, $B \cup (-B) \notin \mathcal{M}_{\{\epsilon^1\}}$, dla (najprostszych) ciągów geometrycznych $\epsilon^1 := (2^{-1}, 2^{-2}, \dots)$, $\epsilon^k := (2^{-k}, 2^{-k-1}, 2^{-k-2}, \dots)$.*

Istnieje wiele prac dotyczących ideału zbiorów mikroskopijnych $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\{\epsilon^\alpha : \alpha\in(0,1)\}}$ dla ciągów geometrycznych $\epsilon^\alpha := (\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)$. Do ważnych konstrukcji doprowadziło pytanie, czy para ideałów $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ spełnia następującą borelowską własność Fubiniego (w skrócie W.F.), gdy $\mathcal{N}$ – zbiory miary zero.

Niech mianowicie $E_x := \{y : (x, y) \in E\}$, $E^y := \{x : (x, y) \in E\}$ będzie (odpowiednio) przekrojem pionowym i poziomym zbioru $E \subset \mathbb{R}^2$. Para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ ideałów podzbiorów $\mathbb{R}$ spełnia W.F. jeżeli dla każdego zbioru borelowskiego $E \subset \mathbb{R}^2$ spełniającego $E_x \in \mathcal{J}$ dla $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\{y : E^y \notin \mathcal{I}\} \in \mathcal{J}$.

Oczywiście, twierdzenie Fubiniego mówi, że $(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ spełnia W.F. Również $(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ spełnia W.F. dla ideału $\mathcal{K}$ zbiorów I kategorii. Niebanalne jest

Twierdzenie 1. *Para $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ nie spełnia W.F.*

Dowód doprowadził do następujących pojęć, użytecznych w kilku innych sytuacjach.

Definicja 1. *Układ przedziałów domkniętych $(I_s : s \in S)$ nazwę napyleniem układu przedziałów domkniętych $(J_t : t \in T)$, jeżeli dla każdego ciągu przedziałów otwartych P_n, $|P_n| = 2^{-n}$, $n \geq 1$ oraz dla $t \in T$, jeżeli $\lambda(J_t \cap \bigcup P_n) \leq \frac{1}{4}|J_t|$, to $\lambda(I_s \cap \bigcup P_n) \leq \frac{1}{4}|I_s|$ dla pewnego $I_s \subset J_t$, $s \in S$.*

Definicja 2. *Zbiór $B \subset \mathbb{R}$ jest typu m, n dla $n > m \geq 1$, jeżeli $B \subset \bigcup_{m\leq i<n} Q_i$ dla pewnych przedziałów otwartych Q_i, $|Q_i| = 2^{-\frac{1}{4}i}$.*

Decydujący lemat mówi, że dla każdego układu $(J_t : t \in T)$ i dla $m \geq 1$ istnieje $n > m$ i napylenie $(I_s : s \in S)$ układu $(J_t : t \in T)$ takie, że zbiór $B := \bigcup I_s$ jest typu m, n.

Lemat pozwala też skonstruować zbiory $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$ takie, że $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{\{\epsilon^k : k\in\mathbb{N}\}}$, $B_1 \cup B_2 \notin \mathcal{M}_{\{\epsilon^1\}}$ dla $\epsilon^k := (2^{-k}, 2^{-k-1}, 2^{-k-2}, \dots)$. Otwarty jest ten problem dla $B_2 = -B_1$ (patrz Hipoteza 1).