Andrzej Komisarski
Uniwersytet Łódzki

Złożenia warunkowych wartości oczekiwanych, hipoteza Amemiya–Ando i paradoksy termodynamiki

Przedstawię kilka wyników dotyczących własności warunkowych wartości oczekiwanych i ich złożeń, z których najbardziej zaskakujące jest:

Twierdzenie 1
Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie bezatomową przestrzenią probabilistyczną i niech $1 \leq p < \infty$. Wówczas dla dowolnych zmiennych losowych $X, Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ następujące warunki są równoważne:

(i) *dla każdej funkcji wypukłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zachodzi $Ef(X) \geq Ef(Y)$*

(ii) *dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją warunkowe wartości oczekiwane $E_1, \ldots, E_n$ takie, że $\|Y - E_n \cdots E_1 X\|_p < \varepsilon$.*

(iii) *dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją warunkowe wartości oczekiwane P_1, P_2, P_3 oraz $E_1, \ldots, E_n \in \{P_1, P_2, P_3\}$ takie, że $\|Y - E_n \cdots E_1 X\|_p < \varepsilon$.*

Dla $p = \infty$ warunki (i) oraz (ii) w dalszym ciągu są równoważne, natomiast (iii) wymaga osłabienia poprzez dopuszczenie czterech warunkowych wartości oczekiwanych, zamiast trzech.

W (ii) można uzyskać warunkowe wartości oczekiwane, których liczba spełnia $n = O\left(\frac{\|Y\|_p^2}{\varepsilon^2} + 1\right)$. W (iii) liczba n jest w ogólności nieporównanie większa. Warunek (i) był wielokrotnie rozważany w przeszłości. Wiąże on nie tyle zmienne losowe X i Y, co ich rozkłady P_X i P_Y. Jest równoważny istnieniu jądra Markowa $K : \mathbb{R} \times Borel(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ takiego, że $P_X(\cdot) = \int K(y, \cdot) P_Y(dy)$. Jest także równoważny istnieniu zmiennej losowej Z i jej warunkowej wartości oczekiwanej $E(Z|\mathcal{G})$ takich, że Z ma rozkład P_X, zaś $E(Z|\mathcal{G})$ ma rozkład P_Y. Twierdzenie 1 jest w podobnym duchu, lecz działa nie na rozkładach, lecz na samych zmiennych losowych. Mówi o możliwości przejścia za pomocą warunkowych wartości oczekiwanych nie od rozkładu P_X do P_Y, lecz od zmiennej X do zmiennej Y (z dowolnie zadaną precyzją).

Twierdzenie to jest zaskakujące, gdyż, intuicyjnie, wydaje się przeczyć drugiemu prawu termodynamiki. Istotnie, jeśli przestrzeń Ω utożsamimy z obiektem fizycznym, a zmienne losowe z rozkładami temperatury na tym obiekcie, wówczas warunkowe wartości oczekiwane odpowiadają pewnym sposobom wyrównywania temperatury w obiekcie Ω lub jego częściach (warto wyobrazić sobie warunkowanie względem σ-ciał skończonych). Jeśli X i Y są zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, wówczas z Twierdzenia 1 wynika, że wielokrotnie wyrównując (w pewien konkretny sposób) w obiekcie Ω temperaturę można, zamiast pełnego jej wyrównania, doprowadzić do przejścia ze stanu opisanego przez X do stanu opisanego przez Y (z dowolnie zadaną precyzją).

Twierdzenie 1 okazuje się mieć zastosowanie w teorii ryzyka ubezpieczeniowego. Innym wnioskiem jest:

Twierdzenie 2
Istnieje $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$*, warunkowe wartości oczekiwane* $P_1, \ldots, P_5$ *na* $(\mathbb{R}, Borel(\mathbb{R}), \lambda)$ *oraz* $E_1, E_2, \cdots \in \{P_1, \ldots, P_5\}$ *takie, że ciąg iteracji* $(E_n \ldots E_2 E_1 f)$ *jest rozbieżny w* $L^2(\mathbb{R})$*.*

Twierdzenie to stanowi kolejny kontrprzykład dla hipotezy Amemiya–Ando (1965). Hipoteza ta mówi, że jeśli H jest przestrzenią Hilberta, $x \in H$, zaś $P_1, \ldots, P_k$ są rzutami ortogonalnymi w H, wówczas dla każdego ciągu $E_1, E_2, \cdots \in \{P_1, \ldots, P_k\}$ ciąg iteracji $(E_n \ldots E_2 E_1 x)$ jest zbieżny w normie H. Ostatnio zostało podanych kilka kontrprzykładów dla tej hipotezy (A. Paszkiewicz, E. Kopecká). Kontrprzykład podany w Twierdzeniu 2 jest o tyle ciekawy, że występujące w nim rzuty są warunkowymi wartościami oczekiwanymi.