Teresa Rajba
Akademia Techniczno–Humanistyczna, Bielsko–Biała
Jacek Mrowiec
Akademia Techniczno–Humanistyczna, Bielsko–Biała
Szymon Wąsowicz
Akademia Techniczno–Humanistyczna, Bielsko–Biała

O pewnych wypukłych porządkach stochastycznych dla rozkładów dwumianowych

Wyniki przedstawione w komunikacie zostały uzyskane wspólnie z Jackiem Mrowcem i Szymonem Wąsowiczem i są zawarte w pracy [4].

Otrzymujemy następujący wynik o wypukłych porządkach stochastycznych dotyczący rozkładów dwumianowych.

Theorem 1. *Niech $x, y \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, $X, X_1, X_2 \sim B(n,x)$, $Y, Y_1, Y_2 \sim B(n,y)$, X, Y niezależne z.l.(n.z.l.), X_1, X_2 n.z.l., Y_1, Y_2 n.z.l. Wtedy*

$$F_{X+Y} \leqslant_{cx} \frac{1}{2}\big(F_{X_1+X_2} + F_{Y_1+Y_2}\big)\,. \tag{1}$$

W dowodzie Twierdzenia 1 wykorzystujemy wypukłe koncentracyjne twierdzenia [2, 3] oraz Lemat Ohlina o wypukłych porządkach stochastycznych [5]. Nierówność (1) może nie być prawdziwa w ogólnym przypadku (bez założenia, że zmienne losowe mają rozkład dwumianowy). Podajemy kontrprzykład.

Korzystając z Twierdzenia 1 podajemy rozwiązanie następującego 25-letniego problemu związanego z operatorami Bernsteina–Sznabla, który Ioan Raşa przedstawił na Conference on Ulam's Type Stability, Rytro 2014 [1, Problem 2, str. 164] (dowodzimy, że nierówność (2) jest prawdziwa).

Czy prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{i,j=0}^{n} \big(b_{n,i}(x)b_{n,j}(x) + b_{n,i}(y)b_{n,j}(y) - 2b_{n,i}(x)b_{n,j}(y)\big) f\left(\frac{i+j}{2n}\right) \geq 0 \tag{2}$$

dla wszystkich funkcji wypukłych $f \in \mathcal{C}\big([0,1]\big)$ i dla każdego $x, y \in [0,1]$, gdzie

$$b_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

są wielomianami Bernsteina stopnia $n \in \mathbb{N}$.

Podajemy również uogólnienie Twierdzenia 1, biorąc m ($m = 2, 3, \ldots$) zmiennych losowych w miejsce dwóch zmiennych losowych X, Y, jak również uogólnienie Problemu Ioana Raşy i jego rozwiązanie.

Bibliografia

[1] Report of meeting (2014) Conference on Ulam's Type Stability Rytro, Poland, June 2–6, 2014. Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math. 13, 139–169.
[2] W. Hoeffding (1963) *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, J. Amer. Stat. Assoc. 58, 13–30.
[3] T. Klein (2003) *Inégalités de concentration, martingales et arbres aléatoires*, Thèse, Université de Versailles-Saint-Quentin.
[4] J. Mrowiec, T. Rajba, Sz. Wąsowicz, *A solution to the problem of Raşa connected with Bernstein polynomials*, arXiv:1604.07381 [math.AP].
[5] J. Ohlin (1969) *On a class of measures of dispersion with application to optimal reinsurance*, ASTIN Bulletin 5, 249–266.