

## Répartition des suites $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ et substitutions

par

BORIS ADAMCZEWSKI (Marseille)

**1. Introduction.** Il est connu depuis les travaux de H. Weyl [29], P. Bohl [5] et W. Sierpiński [25, 26] que la suite  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  est équirépartie modulo 1 si et seulement si  $\alpha$  est irrationnel. Étant donné un nombre irrationnel  $\alpha \in [0, 1[$ , on définit la *discrépance à l'origine* de la suite  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$D_N^*(\alpha) = \sup_{\beta \in [0, 1[} \left| \sum_{n=0}^{N-1} (\chi_{[0, \beta[}(\{n\alpha\}) - \beta) \right|.$$

Cette quantité mesure la déviation de la suite  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  par rapport à une répartition idéale. (Ici  $\{x\} = x - [x]$  désigne la partie fractionnaire de  $x$ .) De nombreux auteurs ont étudié  $D_N^*(\alpha)$  pour  $\alpha$  irrationnel, notamment pour les plus récents citons : C. Baxa [2, 3], C. Baxa et J. Schoissengeier [4], Y. Dupain [9], Y. Dupain et V. T. Sós [11], J. Lesca [14], L. Ramshaw [19], H. Niederreiter [15], J. Schoissengeier [23, 24] et V. T. Sós [27]. De nombreuses références complémentaires pourront être trouvées dans l'ouvrage de L. Kuipers et H. Niederreiter [13] et plus récemment dans celui de M. Drmota et R. F. Tichy [6].

Si  $\beta \in [0, 1[$ , on définit également la quantité

$$\Delta_N^*(\alpha, \beta) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} (\chi_{[0, \beta[}(\{n\alpha\}) - \beta) \right|,$$

que nous appellerons *discrépance locale à l'origine* de la suite  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\beta$ . Les principaux résultats concernant l'étude de la discrépance locale des suites  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  ont été obtenus par H. Kesten [12], Y. Dupain [8], Y. Dupain et V. T. Sós [10]. Plus récemment C. Pinner [17, 18] a obtenu des résultats similaires en étudiant certaines sommes liées à la discrépance des suites  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ . Notons que

$$D_N^*(\alpha) = \sup_{\beta \in [0, 1[} (\Delta_N^*(\alpha, \beta)).$$

De façon générale, les résultats de discrédance sur les suites  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  ont été obtenus en utilisant le développement en fraction continue du nombre  $\alpha$  et des systèmes de numération directement issus de ce développement, comme le système de numération d'Ostrowski [16].

Notre but est d'étudier le comportement asymptotique de  $\Delta_N^*(\alpha, \beta)$  lorsque  $\alpha$  est un nombre quadratique et  $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ . Pour cela, nous n'utilisons pas les systèmes de numération classiques évoqués précédemment. Nous basons notre travail sur l'étude, menée dans [1], d'une classe particulière de suites symboliques définies sur un alphabet binaire. Dans le paragraphe 4, nous introduisons un système de numération généralisé associé à une substitution, introduit par G. Rauzy [22], J.-M. Dumont et A. Thomas [7]. Cet outil est fondamental pour notre étude, il remplace en quelque sorte le système de numération d'Ostrowski utilisé habituellement.

Le travail que nous présentons ici est fondé sur une idée introduite, à travers un exemple, par G. Rauzy [21, 22]. Un des intérêts de cette nouvelle approche est d'obtenir ultérieurement des résultats de répartition pour des suites multi-dimensionnelles. En effet, l'absence de bon équivalent multi-dimensionnel au développement en fraction continue constitue un frein important à la compréhension des suites de Kronecker par des méthodes généralisant directement celles utilisées usuellement en dimension 1. De plus, les seuls exemples connus d'ensembles non triviaux à restes bornés pour les suites de Kronecker sont obtenus à l'aide du système de numération que nous utilisons au paragraphe 4. Ces ensembles sont à frontière fractale et possèdent de nombreuses propriétés géométriques, ergodiques et combinatoires. Le plus célèbre d'entre eux est étudié par G. Rauzy [20], il est connu sous le nom de fractal de Rauzy.

**2. Résultats et notations.** Considérons un couple  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$  avec  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . Introduisons la quantité suivante :

$$\omega_N^+(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{N-1} (\chi_{[0, \beta[}(\{n\alpha\}) - \beta).$$

Alors

$$\Delta_N^*(\alpha, \beta) = |\omega_N^+(\alpha, \beta)|.$$

L'intervalle  $[0, \beta[$  sera dit à *restes majorés* (respectivement *minorés*) si la suite  $(\omega_N^+(\alpha, \beta))_{N \in \mathbb{N}}$  est majorée (respectivement minorée). Il sera dit à *restes bornés* s'il est à la fois à restes majorés et à restes minorés, ce qui revient à dire que la suite  $(\Delta_N^*(\alpha, \beta))_{N \in \mathbb{N}}$  est bornée. Il est déjà connu, d'après un résultat de H. Kesten [12], que la suite  $(\Delta_N^*(\alpha, \beta))_{N \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ .

Dans le paragraphe 5, nous démontrons les résultats suivants :

THÉORÈME 1. Soit  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$  tel que  $\alpha$  soit un nombre quadratique et  $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ . Nous exhibons un algorithme calculant les quantités

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^+(\alpha, \beta)}{\log n}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^+(\alpha, \beta)}{\log n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n^*(\alpha, \beta)}{\log n}.$$

De plus, l'intervalle  $[0, \beta[$  est à restes majorés (respectivement minorés) pour la suite  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  si et seulement si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \omega_n^+(\alpha, \beta)/\log n = 0$  (respectivement  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \omega_n^+(\alpha, \beta)/\log n = 0$ ).

COROLLAIRE. Considérons un couple  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$  pour lequel  $\alpha$  désigne un nombre irrationnel quadratique,  $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$  et  $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ . Il existe alors une constante  $c$  strictement positive, calculable explicitement, telle que

$$\frac{\Delta_N^*(\alpha, \beta)}{\log N} > c$$

pour une infinité d'entiers  $N$ .

Rappelons que V. T. Sós [27] a montré que la conclusion du corollaire précédent est en fait vérifiée par presque tout  $\beta$  au sens de la mesure de Lebesgue sur  $]0, 1[$ . Nous proposons donc une réalisation effective, pour certains  $\beta$ , du résultat métrique de V. T. Sós.

Dans le paragraphe 6, nous obtenons également, en appliquant notre méthode dans le cas d'un exemple précis, le résultat suivant :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n^*\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\log n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n^*\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\log n}.$$

Dans la suite, nous ferons appel à certaines définitions et notations classiques en dynamique symbolique, que nous rappelons donc ici.

On appelle *alphabet* un ensemble  $\mathcal{A}$ , fini et non vide. Les éléments de  $\mathcal{A}$  sont appelés *lettres*. Un *mot* (fini) sur  $\mathcal{A}$  est une suite finie de lettres de  $\mathcal{A}$  et un *mot infini* sur  $\mathcal{A}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$  indexée par  $\mathbb{N}$ . La *longueur* d'un mot fini  $w$ , notée  $|w|$ , est le nombre de lettres le composant. Le mot vide, noté  $\varepsilon$ , est l'unique mot de longueur 0. On note  $\mathcal{A}^*$  l'ensemble des mots de longueur finie sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites sur  $\mathcal{A}$ . Si  $w = w_0w_1 \dots w_n$  est un mot sur  $\mathcal{A}$ , on appelle *préfixe* (respectivement *préfixe strict*) de  $w$  tout mot de la forme  $w_0 \dots w_k$  avec  $0 \leq k \leq n$  (respectivement  $0 \leq k < n$ ), ou vide. Si  $U = u_0u_1 \dots u_n \dots$  est un mot infini sur  $\mathcal{A}$ , on appelle *préfixe* de  $U$  tout mot (fini) de la forme  $u_0u_1 \dots u_k$  avec  $k$  entier, ou vide.

Soit  $U = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite symbolique définie sur un alphabet  $\mathcal{A}$ . On appelle *facteur* de  $U$  tout mot fini de la forme  $u_iu_{i+1} \dots u_j$ ,  $0 \leq i \leq j$ . Une suite dans laquelle tout facteur admet une infinité d'occurrences est dite *récurrente*. Lorsque ces occurrences ont de plus lieu à lacunes bornées, la suite est dite *uniformément récurrente*. Si  $w$  est un facteur de  $U$  et  $a$  une lettre de  $\mathcal{A}$ , alors  $|w|_a$  désigne le nombre d'occurrences de la lettre  $a$  dans

le mot  $w$ . L'application classique de *décalage* (*shift* en anglais), notée  $\mathcal{S}$ , associe à une suite  $U = (u_k)_{k \geq 0}$  la suite  $\mathcal{S}(U) = (u_k)_{k \geq 1}$ .

On définit sur  $\mathcal{A}^*$  une opération, dite de *concaténation*, qui consiste simplement à juxtaposer deux mots. Muni de cette opération, l'ensemble  $\mathcal{A}^*$  est un monoïde libre dont l'élément neutre est  $\varepsilon$ . Une application de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$ , appelée *substitution* sur l'alphabet  $\mathcal{A}$ , se prolonge par concaténation en un endomorphisme du monoïde  $\mathcal{A}^*$  puis en une application de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  dans lui-même. Étant donnée une substitution  $\xi$  définie sur  $\mathcal{A}$ , on appelle *matrice d'incidence* de  $\xi$  la matrice  $M_\xi = (|\xi(j)|_i)_{(i,j) \in \mathcal{A}^2}$ . La substitution  $\xi$  est dite *primitive* s'il existe un entier  $k$  tel que pour tout élément  $a$  de  $\mathcal{A}$  et tout élément  $b$  de  $\mathcal{A}$ ,  $b$  soit facteur de  $\xi^k(a)$ . Le fait qu'une substitution soit primitive est équivalent au fait que sa matrice d'incidence admette une puissance strictement positive.

### 3. Liens entre problèmes de répartition et suites symboliques.

Étant donné un nombre irrationnel  $\alpha \in [0, 1[$ , nous nous intéressons aux problèmes de répartition de la suite  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  par rapport à un intervalle  $[0, \beta[$ , où  $\beta \in [0, 1[$ . Plus précisément, nous cherchons à comprendre le comportement asymptotique des quantités  $\omega_N^+(\alpha, \beta)$  et donc  $\Delta_N^*(\alpha, \beta)$ , introduites aux paragraphes 1 et 2. Nous montrons, dans ce paragraphe, que cette étude est intimement liée à la bonne compréhension de certaines suites symbolique. Nous exhibons parmi ces suites symboliques celles faisant intervenir des phénomènes d'autosimilarité.

Considérons donc un couple  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ ,  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . Introduisons alors la suite  $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur l'alphabet binaire  $\{a, b\}$  par

$$(3.1) \quad u_n = \begin{cases} a & \text{si } \{n\alpha\} \in [0, \beta[, \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette suite symbolique contient exactement l'information nécessaire et suffisante pour évaluer les quantités que nous désirons étudier. En effet, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{n=0}^{N-1} (\chi_{[0, \beta[}(\{n\alpha\}) - \beta) = |u_0 u_1 \dots u_{N-1}|_a - N\beta.$$

Remarquons que le codage  $U$  de la suite  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  doit être vu comme une opération de simplification, en ce sens qu'il paraît plus aisé d'étudier une suite définie sur un alphabet fini qu'une suite à valeurs dans l'intervalle  $[0, 1[$ . Nous devons donc à présent comprendre l'évolution du nombre de  $a$  apparaissant dans un préfixe arbitraire de  $U$ . Lorsque la suite  $U$  fait intervenir des phénomènes d'autosimilarité, c'est-à-dire si  $U$  est liée à un point fixe de substitution, nous verrons au paragraphe 4 qu'il existe un outil puissant pour mener cette étude.

Nous avons précédemment montré le résultat suivant :

**THÉORÈME 3.1** ([1]). *Soit  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$  un couple tel que  $\alpha$  soit un nombre quadratique,  $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ ,  $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  et  $U$  la suite définie sur l'alphabet  $\{a, b\}$  à partir du couple  $(\alpha, \beta)$  comme en (3.1). Alors si  $\alpha \leq \beta$  (respectivement  $\alpha \geq \beta$ ), il existe un morphisme de monoïde libre  $\phi$  de  $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$  vers  $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$  et une substitution  $\xi$  sur  $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$  tels que*

$$U = \phi(X_\xi) \quad (\text{respectivement } U = a\mathcal{S}(\phi(X_\xi))),$$

où  $X_\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi^n(1)$  est point fixe non périodique de  $\xi$  et  $\mathcal{S}$  désigne le shift usuel sur  $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$ . De plus, dans les deux cas,  $\xi$  vérifie :

- (i)  $\xi$  est une substitution primitive,  $\xi(1)$  commence par 1 et  $|\xi(1)| \geq 2$ ,
- (ii) la matrice d'incidence de  $\xi$  admet trois valeurs propres simples réelles  $\theta$ , 1 et  $1/\theta$ , avec  $\theta > 1$ .

Dans [1], nous remarquons qu'une suite  $U$  associée à un couple  $(\alpha, \beta)$  comme en (3.1) est intimement liée à un échange de trois intervalles. Nous montrons, par un raisonnement d'induction, qu'il est possible d'obtenir cette suite en itérant quatre substitutions définies sur l'alphabet  $\{1, 2, 3\}$  à partir de la lettre 1 puis en projetant la suite ainsi obtenue à l'aide d'un morphisme de monoïde libre de  $\{1, 2, 3\}^*$  vers  $\{a, b\}^*$ . L'ordre d'itération des substitutions est déterminé par un algorithme de type "fractions continues" développant les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Nous montrons que cet algorithme vérifie un théorème de type Lagrange, le développement associé au couple  $(\alpha, \beta)$  étant ultimement périodique si et seulement si  $\alpha$  et  $\beta$  appartiennent à un même corps quadratique. Les conditions imposées sur les paramètres  $(\alpha, \beta)$  dans le théorème précédent sont donc équivalentes au fait que le développement de type "fractions continues" associé aux paramètres soit ultimement périodique. Notons que ce développement nous permet de déterminer les applications  $\phi$ ,  $\xi$  (et donc la valeur de  $\theta$ ) introduites dans le théorème 3.1.

*Dans toute la suite les couples  $(\alpha, \beta)$  considérés vérifieront les hypothèses du théorème 3.1.*

Supposons que  $\alpha \leq \beta$ . D'après le théorème 3.1, la suite  $U$  est alors obtenue comme image du point fixe de la substitution  $\xi$  par la projection  $\phi$ . Soit  $U_n = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$  le préfixe de longueur  $n$  de la suite  $U$ . Si  $X_k = x_0 x_1 \dots x_{k-1}$  désigne le préfixe de longueur  $k$  de la suite  $X_\xi$ , il existe alors un unique entier  $N_n$  tel que  $\phi(x_0 x_1 \dots x_{N_n-1})$  soit un préfixe de  $u_0 u_1 \dots u_{n-1}$  et  $u_0 u_1 \dots u_{n-1}$  soit un préfixe strict de  $\phi(x_0 x_1 \dots x_{N_n})$ .

Posons

$$S_n(U) = \#\{0 \leq k < n : u_k = a\} + \frac{\beta}{\beta - 1} \#\{0 \leq k < n : u_k = b\}.$$

Alors

$$S_n(U) = \frac{\omega_n^+(\alpha, \beta)}{1 - \beta}.$$

Ainsi, en associant respectivement les “poids” 1 et  $\beta/(\beta - 1)$  aux lettres  $a$  et  $b$ , le poids  $S_n(U)$  du préfixe de longueur  $n$  de la suite  $U$  est un multiple de  $\omega_n^+(\alpha, \beta)$ . Nous allons maintenant montrer qu’en associant les “bons poids” aux lettres 1, 2 et 3, les poids des préfixes du point fixe de la substitution  $\xi$  nous renseigneront sur  $\omega_n^+(\alpha, \beta)$ . Cette étape nous permettra de travailler directement avec la suite  $X_\xi$  et d’oublier ensuite la projection  $\phi$ . Pour cela, nous introduisons l’application  $f$  définie de  $\{1, 2, 3\}$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$(3.2) \quad f(i) = |\phi(i)|_a + \frac{\beta}{\beta - 1} |\phi(i)|_b \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Si  $m \in \{1, 2, 3\}^*$ , on pose

$$S^{(f)}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = \varepsilon, \\ \sum_{j=1}^k f(a_j) & \text{si } m = a_1 a_2 \dots a_k, a_j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Alors, comme  $\beta - 1 < 0$

$$S^{(f)}(X_{N_n}) + C \frac{\beta}{\beta - 1} < S_n(U) < S^{(f)}(X_{N_n}) + C,$$

où  $C = \max\{|\phi(1)|, |\phi(2)|, |\phi(3)|\}$ . On obtient donc

$$(1 - \beta)S^{(f)}(X_{N_n}) - C\beta < \omega_n^+(\alpha, \beta) < (1 - \beta)S^{(f)}(X_{N_n}) + C(1 - \beta)$$

et ainsi

$$(3.3) \quad \omega_n^+(\alpha, \beta) = (1 - \beta)S^{(f)}(X_{N_n}) + O(1).$$

On remarquera de plus que  $N_n \leq n \leq C(N_n + 1)$ , et du fait que la suite  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  prend toutes les valeurs entières, nous pouvons déduire les égalités suivantes :

$$(3.4) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^+(\alpha, \beta)}{\log n} = (1 - \beta) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S^{(f)}(X_{N_n})}{\log N_n} \\ = (1 - \beta) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S^{(f)}(X_n)}{\log n},$$

$$(3.5) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^+(\alpha, \beta)}{\log n} = (1 - \beta) \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S^{(f)}(X_{N_n})}{\log N_n} \\ = (1 - \beta) \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S^{(f)}(X_n)}{\log n}.$$

D’après [15] les quantités introduites dans les deux équations précédentes sont finies dès que  $\alpha$  est à quotients partiels bornés, ce qui est bien sûr le cas lorsque  $\alpha$  est quadratique.

REMARQUE 3.2. Le théorème 3.1 implique que les égalités (3.3), (3.4) et (3.5) sont vérifiées même si  $\alpha \geq \beta$ .

Il est déjà connu, d'après un résultat de H. Kesten [12], que la suite  $(\Delta_N^*(\alpha, \beta))_{N \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ . C'est pourquoi il ne faut pas voir la condition  $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  comme trop restrictive pour notre étude.

D'après l'équation (3.3), l'intervalle  $[0, \beta[$  est un intervalle à restes majorés (respectivement minorés) pour la suite  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  si et seulement si la suite  $(S^{(f)}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée (respectivement minorée).

Nous utiliserons le lemme suivant au paragraphe 4.

LEMME 3.3. *Soit  $\varepsilon > 0$  et  $w$  un facteur de la suite  $X_\xi$ . Alors, il existe un entier  $n_\varepsilon$  tel que  $|w| > n_\varepsilon$  implique*

$$\frac{S^{(f)}(w)}{|w|} < \varepsilon.$$

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$  et  $C = \max\{|\phi(1)|, |\phi(2)|, |\phi(3)|\}$ . L'équirépartition modulo 1 de la suite  $(n\alpha)$  implique l'existence d'un entier  $n_\varepsilon$  tel que pour tout entier  $N > n_\varepsilon$ ,

$$(3.6) \quad \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[x, y[}(\{k\alpha\}) - N(y-x) \right| < \frac{(1-\beta)\varepsilon}{2C}.$$

Considérons  $w$  un facteur de la suite  $X_\xi$  de longueur supérieure à  $n_\varepsilon$ . Alors  $v = \phi(w)$  est un facteur de  $U$  de longueur également supérieure à  $n_\varepsilon$  et il existe un entier  $k_w$  tel que  $v = u_{k_w} u_{k_w+1} \dots u_{k_w+|v|-1}$ . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} S^{(f)}(w) &= |u_{k_w} u_{k_w+1} \dots u_{k_w+|v|-1}|_a + \frac{\beta}{\beta-1} |u_{k_w} u_{k_w+1} \dots u_{k_w+|v|-1}|_b \\ &= \frac{1}{1-\beta} (|u_{k_w} u_{k_w+1} \dots u_{k_w+|v|-1}|_a - |v|_b) \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left( \sum_{k=k_w}^{k_w+|v|-1} \chi_{[0, \beta[}(\{k\alpha\}) - |v|_b \right) \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left( \sum_{k=0}^{|v|-1} \chi_{[0, \beta[}(\{k\alpha + k_w\alpha\}) - |v|_b \right). \end{aligned}$$

Si  $\{k_w\alpha\} > \beta$ , alors

$$S^{(f)}(w) = \frac{1}{1-\beta} \left( \sum_{k=0}^{|v|-1} \chi_{[1-\{k_w\alpha\}, 1-\{k_w\alpha\}+\beta[}(\{k\alpha\}) - |v|_b \right),$$

et si  $\{k_w\alpha\} \leq \beta$ , alors

$$S^{(f)}(w) = \frac{1}{1-\beta} \left( \left( \sum_{k=0}^{|v|-1} \chi_{[1-\{k_w\alpha\}, 1[}(\{k\alpha\}) - |v|\{k_w\alpha\} \right) + \left( \sum_{k=0}^{|v|-1} \chi_{[0, \beta - \{k_w\alpha\}[}(\{k\alpha\}) - |v|(\beta - \{k_w\alpha\}) \right) \right).$$

Dans les deux cas, (3.6) implique

$$\frac{|S^{(f)}(w)|}{|v|} < \frac{\varepsilon}{C},$$

puisque  $|v| > n_\varepsilon$ . De plus, comme  $|v| \leq C|w|$ , il suit

$$\frac{|S^{(f)}(w)|}{|w|} < \varepsilon. \blacksquare$$

**4. Système de numération généralisé et substitution.** Nous voilà ainsi conduits à évaluer une somme liée à un point fixe de substitution primitive. Pour cela, nous allons utiliser un système de numération associé à la substitution  $\xi$ . Ce système est introduit par J. M. Dumont et A. Thomas [7] sous une forme classique. Dans [22], G. Rauzy en donne une version plus visuelle à l'aide de l'automate des préfixes. C'est ce point de vue que nous avons choisi d'adopter.

**DÉFINITION 4.1.** Considérons une substitution  $\sigma$  sur un alphabet  $\mathcal{A}$ . Le sous-ensemble de  $\mathcal{A}^*$  formé des préfixes stricts des images par  $\sigma$  des éléments de  $\mathcal{A}$  sera noté  $\text{Pref}$  ou  $\text{Pref}_\sigma$  si une confusion est possible. L'*automate des préfixes* associé à la substitution  $\sigma$  est défini par :

- $\mathcal{A}$  est l'ensemble des états de l'automate,
- $\text{Pref}$  est l'ensemble des étiquettes,
- il existe une flèche de l'état  $a$  vers l'état  $b$  étiquetée par le mot  $m$  si  $mb$  est un préfixe de  $\sigma(a)$ .

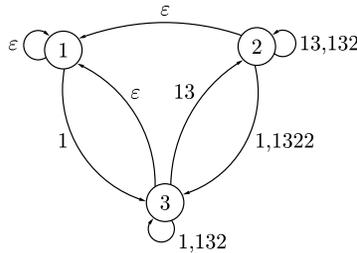


Fig. 4.1. Exemple d'automate des préfixes dans le cas de la substitution  $1 \mapsto 13$ ,  $2 \mapsto 13223$ ,  $3 \mapsto 1323$

DÉFINITION 4.2. Un chemin étiqueté  $\mathcal{C}$  reconnaissable par l'automate des préfixes associé à  $\sigma$  sera noté sous la forme

$$((i_0, i_1, E_0), (i_1, i_2, E_1), \dots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1})),$$

$i_j \in \mathcal{A}$  pour  $0 \leq j \leq n$ ,  $E_j \in \text{Pref}_\sigma$  pour  $0 \leq j \leq n-1$ . L'entier  $n$  désigne la longueur du chemin.

On appellera *suite des états* associée au chemin  $\mathcal{C}$  la suite  $(i_0, i_1, \dots, i_n)$  et *suite des étiquettes* associée au chemin  $\mathcal{C}$  la suite  $(E_0, E_1, \dots, E_{n-1})$ . L'ensemble des chemins étiquetés de longueur  $n$  reconnaissables par l'automate des préfixes associé à  $\sigma$  sera noté  $\mathcal{C}_\sigma^n$ .

On appellera *chemin reconnaissable par l'automate des préfixes* associé à  $\sigma$  une suite  $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ ,  $i_j \in \mathcal{A}$  pour  $0 \leq j \leq n$ , pour laquelle il existe un chemin étiqueté reconnaissable par l'automate des préfixes associé à  $\sigma$  dont la suite des états est  $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ .

Le principal théorème concernant l'automate des préfixes associé à un point fixe de substitution est le suivant :

THÉORÈME 4.3 (Dumont et Thomas [7], Rauzy [22]). *Conservons les notations de la définition 4.1 et supposons de plus qu'il existe  $a \in \mathcal{A}$  tel que  $\sigma(a)$  commence par  $a$  et  $|\sigma(a)| \geq 2$ . Notons alors  $X_\sigma$  l'unique point fixe de  $\sigma$  commençant par  $a$ .*

(i) *Pour tout entier  $N$ , il existe un unique chemin étiqueté reconnaissable par l'automate des préfixes associé à  $X_\sigma$ , partant de  $a$  et étiqueté par la suite  $(E_0, E_1, \dots, E_N)$  tel que  $E_0 \neq \varepsilon$  et  $X_N = \sigma^n(E_0)\sigma^{n-1}(E_1) \dots E_N$ , où  $X_N$  désigne le préfixe de longueur  $N$  de la suite  $X_\sigma$ .*

(ii) *Inversement, à un tel chemin correspond un unique préfixe non vide de  $X_\sigma$ , donné par la formule précédente.*

(iii) *De plus,  $|\sigma^n(a)| \leq N < |\sigma^{n+1}(a)|$ .*

Revenons pour l'instant à notre substitution  $\xi$ . Pour  $m \in \{1, 2, 3\}^*$ , notons  $L(m) = (|m|_i)_{i \in \{1, 2, 3\}}$ . Alors

$$L(\xi(m)) = M_\xi(L(m)).$$

Donc, si  $i$  et  $j$  sont fixés dans  $\{1, 2, 3\}$ , la suite  $(|\xi^n(j)|_i)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie une relation de récurrence dont les coefficients sont ceux du polynôme minimal de  $M_\xi$ . Ainsi il existe des réels  $\lambda_{i,j}$ ,  $\lambda'_{i,j}$  et  $\lambda''_{i,j}$  tels que pour tout entier  $n$ ,

$$(4.1) \quad |\xi^n(j)|_i = \lambda_{i,j}\theta^n + \lambda'_{i,j} + \lambda''_{i,j} \left(\frac{1}{\theta}\right)^n,$$

car, d'après le théorème 3.1,  $M_\xi$  admet trois valeurs propres simples réelles qui sont  $\theta$ , 1 et  $1/\theta$ , avec  $\theta > 1$ . De plus, ces coefficients sont déterminés par

la relation

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i,j} \\ \lambda'_{i,j} \\ \lambda''_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta & 1 & \frac{1}{\theta} \\ \theta^2 & 1 & (\frac{1}{\theta})^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} |\xi^0(j)|_i \\ |\xi(j)|_i \\ |\xi^2(j)|_i \end{pmatrix}.$$

Par primitivité de  $\xi$ , la suite positive  $(|\xi^n(j)|_i)_{n \in \mathbb{N}}$  est non bornée. On a donc  $\lambda_{i,j} > 0$ . D'après (4.1), il vient

$$(4.2) \quad |\xi^n(j)| = \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_{i,j} \right) \theta^n + \left( \sum_{i=1}^3 \lambda'_{i,j} \right) + \left( \sum_{i=1}^3 \lambda''_{i,j} \right) \left( \frac{1}{\theta} \right)^n$$

et

$$\begin{aligned} S^{(f)}(\xi^n(j)) &= \sum_{i=1}^3 |\xi^n(j)|_i f(i) \\ &= \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_{i,j} f(i) \right) \theta^n + \left( \sum_{i=1}^3 \lambda'_{i,j} f(i) \right) + \left( \sum_{i=1}^3 \lambda''_{i,j} f(i) \right) \left( \frac{1}{\theta} \right)^n. \end{aligned}$$

D'après l'équation (4.2), on obtient

$$\begin{aligned} S^{(f)}(\xi^n(j)) &= \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_{i,j} f(i) \right) \left( \frac{|\xi^n(j)| - (\sum_{i=1}^3 \lambda'_{i,j}) - (\sum_{i=1}^3 \lambda''_{i,j}) (\frac{1}{\theta})^n}{\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,j}} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \lambda'_{i,j} f(i) + \left( \sum_{i=1}^3 \lambda''_{i,j} f(i) \right) \left( \frac{1}{\theta} \right)^n. \end{aligned}$$

Or, comme  $j$  est un facteur de  $X_\xi$ ,  $\xi^n(j)$  est également un facteur de  $X_\xi$  et la primitivité de  $\xi$  implique que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\xi^n(j)| = \infty$ . D'après le lemme 3.3,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S^{(f)}(\xi^n(j))}{|\xi^n(j)|} = 0.$$

Il suit que, pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $(\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,j} f(i)) = 0$ . Ainsi

$$S^{(f)}(\xi^n(j)) = \underbrace{\left( \sum_{i=1}^3 \lambda'_{i,j} f(i) \right)}_{\lambda'(j)} + \underbrace{\left( \sum_{i=1}^3 \lambda''_{i,j} f(i) \right)}_{\lambda''(j)} \left( \frac{1}{\theta} \right)^n.$$

Finalement, pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ , il existe deux nombres réels calculables explicitement,  $\lambda'(j)$  et  $\lambda''(j)$ , tels que pour tout entier  $n$  on ait

$$(4.3) \quad S^{(f)}(\xi^n(j)) = \lambda'(j) + \lambda''(j) \left( \frac{1}{\theta} \right)^n.$$

Posons maintenant, pour  $m \in \{1, 2, 3\}^*$

$$\lambda'(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = \varepsilon, \\ \sum_{j=1}^k \lambda'(a_j) & \text{si } m = a_1 a_2 \dots a_k, a_j \in \{1, 2, 3\}, \end{cases}$$

et

$$\lambda''(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = \varepsilon, \\ \sum_{j=1}^k \lambda''(a_j) & \text{si } m = a_1 a_2 \dots a_k, a_j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$  tel que la suite  $(i, j)$  est un chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à  $\xi$ , on pose,

$$\begin{aligned} M_{(i,j)} &= \max\{\lambda'(E) : (i, j, E) \in \mathcal{C}_\xi^1\}, \\ m_{(i,j)} &= \min\{\lambda'(E) : (i, j, E) \in \mathcal{C}_\xi^1\}. \end{aligned}$$

Nous allons à présent introduire deux nouveaux automates associés à la substitution  $\xi$  et construits à partir de l'automate des préfixes associé à  $\xi$ .

DÉFINITION 4.4. Nous appellerons  $\mathcal{A}_{\max \xi}$ , associé à  $X_\xi$ , l'automate défini par :

- $\{1, 2, 3\}$  est l'ensemble des états de l'automate,
- l'ensemble des étiquettes est formé des nombres  $M_{(i,j)}$  introduits ci-dessus,
- il existe une flèche de l'état  $i$  vers l'état  $j$ , s'il existe  $m \in \text{Pref}_\xi$  tel que  $mj$  soit un préfixe de  $\xi(i)$  ; cette flèche est alors étiquetée par le mot  $M_{(i,j)}$ .

DÉFINITION 4.5. Nous appellerons  $\mathcal{A}_{\min \xi}$  associé à  $X_\xi$ , l'automate défini par :

- $\{1, 2, 3\}$  est l'ensemble des états de l'automate,
- l'ensemble des étiquettes est formé des nombres  $m_{(i,j)}$  introduits ci-dessus,
- il existe une flèche de l'état  $i$  vers l'état  $j$ , s'il existe  $m \in \text{Pref}_\xi$  tel que  $mj$  soit un préfixe de  $\xi(i)$  ; cette flèche est alors étiquetée par le mot  $m_{(i,j)}$ .

REMARQUE 4.6. Par construction de  $\mathcal{A}_{\max \xi}$  et  $\mathcal{A}_{\min \xi}$ , on est assuré que les ensembles des chemins (non étiquetés) reconnaissables par chacun des trois automates que nous avons définis sont identiques. En fait  $\mathcal{A}_{\max \xi}$  et  $\mathcal{A}_{\min \xi}$  peuvent être vus comme deux "sous-automates" de l'automate des préfixes associé à  $\xi$ , en ce sens que tout chemin (non étiqueté) reconnaissable par l'un de ces deux automates est un chemin (non étiqueté) reconnaissable par l'automate des préfixes associé à  $\xi$ .

On peut remarquer que dans les deux automates définis précédemment, une flèche de l'état  $i$  vers l'état  $j$  est nécessairement étiquetée par le nombre

$M_{(i,j)}$  dans le premier automate et  $m_{(i,j)}$  dans le second. Nous pourrions donc confondre les notions de chemin et de chemin étiqueté reconnaissable par ces automates. On notera ainsi  $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ , pour chacun de ces deux automates, l'unique chemin (étiqueté) de longueur  $n$  dont la suite des états est  $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ . Compte tenu de cette nouvelle notation et de la remarque 4.6, nous pouvons définir les deux quantités suivantes pour tout chemin  $(i_0, i_1, \dots, i_{n+1}) \in \mathcal{C}_\xi^{n+1}$  :

$$P_M(i_0, i_1, \dots, i_{n+1}) = \sum_{k=0}^n M_{i_k, i_{k+1}},$$

$$P_m(i_0, i_1, \dots, i_{n+1}) = \sum_{k=0}^n m_{i_k, i_{k+1}}.$$

Nous devons à présent définir une notion très utile pour obtenir des résultats précis à l'aide de ce type d'automates.

**DÉFINITION 4.7.** Étant donné un automate dont l'ensemble des états est noté  $\mathcal{A}$ , on appelle *boucle élémentaire* tout chemin étiqueté reconnaissable par l'automate de la forme  $((i_0, i_1, E_0), \dots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1}))$ ,  $(i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{A}^{n+1}$ , satisfaisant les deux conditions suivantes :

- $i_0 = i_n$ ,
- $i_k \neq i_j, \forall 0 \leq j, k < n$ .

On notera  $\mathcal{E}l$  l'ensemble des boucles élémentaires de l'automate.

**REMARQUE 4.8.** Comme les deux automates,  $\mathcal{A}_{\max \xi}$  et  $\mathcal{A}_{\min \xi}$ , ne comportent que trois états puisque  $\xi$  est définie sur un alphabet à trois lettres et que chacune de leurs flèches ne porte qu'une seule étiquette, ils ne peuvent compter plus de 8 boucles élémentaires, à état de départ près. Ces boucles sont, si elles existent :

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2, 1), (1, 3, 1), (2, 3, 2), (1, 2, 3, 1), (1, 3, 2, 1).$$

Dans le cas de l'automate de la figure 4.1, les boucles élémentaires sont :

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3, 1), (2, 3, 2), (1, 3, 2, 1).$$

**5. Les principaux résultats.** On introduit les quantités suivantes :

$$M = \max \left\{ \frac{P_M(B)}{|B|} : B \in \mathcal{E}l \right\}, \quad m = \min \left\{ \frac{P_m(B)}{|B|} : B \in \mathcal{E}l \right\},$$

$$A = \max\{|M|, |m|\}.$$

Nous rappelons que  $\theta$  est la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de  $\xi$  introduite dans le théorème 3.1.

THÉORÈME 5.1. Avec les notations précédentes, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^+(\alpha, \beta)}{\log n} &= \frac{1 - \beta}{\log \theta} M, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^+(\alpha, \beta)}{\log n} &= \frac{1 - \beta}{\log \theta} m, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n^*(\alpha, \beta)}{\log n} &= \frac{1 - \beta}{\log \theta} A. \end{aligned}$$

REMARQUE 5.2. Soit  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$  un couple tel que  $\alpha$  soit un nombre quadratique,  $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ ,  $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ . Le théorème 5.1 nous dit que l'on peut alors calculer algorithmiquement les quantités

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^+(\alpha, \beta)}{\log n}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^+(\alpha, \beta)}{\log n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n^*(\alpha, \beta)}{\log n},$$

à l'aide de l'algorithme développé dans [1] qui, partant du développement ultimement périodique d'un couple de paramètres  $(\alpha, \beta)$ , produit la substitution  $\xi$  et la projection  $\phi$  définie dans le théorème 3.1.

Dans le lemme suivant, nous montrons que les poids  $P_M(i_0, i_1, \dots, i_n)$  et  $P_m(i_0, i_1, \dots, i_n)$  associés à un chemin  $(i_0, i_1, \dots, i_n)$  peuvent être obtenus, à une constante près indépendante de  $n$ , en sommant des poids de boucles élémentaires. Ce résultat traduit simplement que, d'une part, le petit nombre d'états des automates contraint tout chemin à repasser régulièrement par les mêmes états et donc à effectuer des boucles, et que d'autre part, l'addition des poids commute avec la concaténation.

LEMME 5.3. Il existe une constante  $C' > 0$  telle que pour tout chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à  $X_\xi$  dont la suite des états est  $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ , il existe  $(B_1, B_2, \dots, B_k) \in (\mathcal{E}l)^k$ ,  $k$  éventuellement nul, tels que :

- (i)  $\left| P_M(i_0, i_1, \dots, i_n) - \sum_{i=1}^k P_M(B_i) \right| \leq C'$ ,
- (ii)  $\left| P_m(i_0, i_1, \dots, i_n) - \sum_{i=1}^k P_m(B_i) \right| \leq C'$ ,
- (iii)  $\left| n - \sum_{i=1}^k |B_i| \right| \leq 2$ .

*Preuve.* Raisonnons par récurrence sur la longueur  $n$  du chemin. Posons  $C' = 2 \max\{\max\{|P_M(i, j)|, |P_m(i, j)|\} : (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2\}$ . Considérons à présent un chemin de longueur 1,  $(i_0, i_1)$ . Alors  $|P_M(i_0, i_1) - 0| \leq C'$  et  $|P_m(i_0, i_1) - 0| \leq C'$ . La propriété est ainsi vérifiée pour  $n = 1$ . De même si

$(i_0, i_1, i_2)$  est un chemin de longueur 2,

$$\begin{aligned} |P_M(i_0, i_1, i_2) - 0| &\leq |P_M(i_0, i_1)| + |P_M(i_1, i_2)| \leq C', \\ |P_m(i_0, i_1, i_2) - 0| &\leq |P_m(i_0, i_1)| + |P_m(i_1, i_2)| \leq C'. \end{aligned}$$

De plus l'assertion (iii) est satisfaite puisque  $k$  est nul. La propriété est donc également vérifiée pour  $n = 2$ .

Supposons à présent que  $n \geq 3$  et que la propriété est satisfaite pour tout chemin de longueur strictement inférieure à  $n$ . Alors comme  $(i_0, i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2, 3\}^{n+1}$ , on est assuré qu'il existe  $(l, h) \in \{0, 1, 2, 3\}^2$ ,  $l < h$ , tel que  $i_l = i_h$ . Nous pouvons alors poser  $h' = \min\{m > l : i_m = i_l\}$ . Ainsi  $(i_l, \dots, i_{h'})$  est une boucle élémentaire et  $(i_0, \dots, i_l, i_{h'+1}, \dots, i_n)$  est un chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à  $\xi$  dont la longueur est strictement inférieure à  $n$ . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe  $(B_1, B_2, \dots, B_k) \in (\mathcal{E}l)^k$ ,  $k$  pouvant être éventuellement nul, tel que

$$\begin{aligned} \left| P_M(i_0, \dots, i_l, i_{h'+1}, \dots, i_n) - \sum_{i=1}^k P_M(B_i) \right| &\leq C', \\ \left| P_m(i_0, \dots, i_l, i_{h'+1}, \dots, i_n) - \sum_{i=1}^k P_m(B_i) \right| &\leq C', \\ \left| (n - (h' - l)) - \sum_{i=1}^k |B_i| \right| &\leq 2. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} P_M(i_0, i_1, \dots, i_n) &= P_M(i_0, \dots, i_l, i_{h'+1}, \dots, i_n) + P_M(i_l, \dots, i_{h'}), \\ P_m(i_0, i_1, \dots, i_n) &= P_m(i_0, \dots, i_l, i_{h'+1}, \dots, i_n) + P_m(i_l, \dots, i_{h'}). \end{aligned}$$

Ainsi, en posant  $B_{k+1} = (i_l, \dots, i_{h'})$ , il vient

$$\begin{aligned} \left| P_M(i_0, i_1, \dots, i_n) - \sum_{i=1}^{k+1} P_M(B_i) \right| &\leq C', \\ \left| P_m(i_0, i_1, \dots, i_n) - \sum_{i=1}^{k+1} P_m(B_i) \right| &\leq C', \\ \left| n - \sum_{i=1}^{k+1} |B_i| \right| &\leq 2, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

*Preuve du théorème 5.1.* Considérons un entier  $N$ . D'après le théorème 4.3, il existe un unique chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à  $X_\xi$ , partant de 1, étiqueté par  $(E_0, E_1, \dots, E_{n_N})$ ,  $E_0 \neq \varepsilon$ ,

et dont la suite des états est  $(i_0, i_1, \dots, i_{n_N})$ , tel que

$$X_N = \xi^{n_N}(E_0)\xi^{n_N-1}(E_1) \dots E_{n_N}.$$

On a donc

$$S^{(f)}(X_N) = \sum_{k=0}^{n_N} S^{(f)}(\xi^k(E_{n_N-k})).$$

Puis, d'après l'équation (4.3),

$$S^{(f)}(X_N) = \sum_{k=0}^{n_N} \lambda'(E_{n_N-k}) + \sum_{k=0}^{n_N} \lambda''(E_{n_N-k}) \left(\frac{1}{\theta}\right)^k.$$

Puisque les  $E_k$  appartiennent à l'ensemble fini  $\text{Pref}_\xi$  et que  $\theta > 1$ , on peut en déduire que

$$S^{(f)}(X_N) = \sum_{k=0}^{n_N} \lambda'(E_{n_N-k}) + O(1),$$

où la constante dans le  $O$  est indépendante de  $N$ . Il vient alors

$$P_m(i_0, i_1, \dots, i_{n_N}) + O(1) \leq S^{(f)}(X_N) \leq P_M(i_0, i_1, \dots, i_{n_N}) + O(1).$$

D'après le lemme 5.3, il existe des boucles élémentaires  $B_1, B_2, \dots, B_k$  tels que

$$\sum_{i=1}^k P_m(B_i) + O(1) \leq S^{(f)}(X_N) \leq \sum_{i=1}^k P_M(B_i) + O(1).$$

D'où

$$\sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{|B_i|} \frac{P_m(B_i)}{|B_i|} \right) + O(1) \leq S^{(f)}(X_N) \leq \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{|B_i|} \frac{P_M(B_i)}{|B_i|} \right) + O(1),$$

puis

$$(5.1) \quad \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{|B_i|} m \right) + O(1) \leq S^{(f)}(X_N) \leq \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{|B_i|} M \right) + O(1).$$

De plus, d'après le (iii) du théorème 4.3,  $|\xi^{n_N}(1)| \leq N < |\xi^{n_N+1}(1)|$ . Ceci implique notamment que

$$(5.2) \quad n_N \sim \frac{\log N}{\log \theta},$$

et d'après le (iii) du lemme 5.3,

$$\frac{m}{\log \theta} + o(1) \leq \frac{S^{(f)}(X_N)}{\log N} \leq \frac{M}{\log \theta} + o(1).$$

On en déduit que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{S^{(f)}(X_N)}{\log N} \leq \frac{M}{\log \theta}, \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{S^{(f)}(X_N)}{\log N} \geq \frac{m}{\log \theta}.$$

Finalement, d'après les équations (3.4) et (3.5), il vient

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\omega_N^+(\alpha, \beta)}{\log N} \leq \frac{M(1 - \beta)}{\log \theta}, \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\omega_N^+(\alpha, \beta)}{\log N} \geq \frac{m(1 - \beta)}{\log \theta}.$$

Nous allons maintenant construire deux chemins optimisant les inégalités précédentes. Considérons  $(i_0, i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{E}l$  vérifiant

$$\frac{P_M(i_0, i_1, \dots, i_p)}{|(i_0, i_1, \dots, i_p)|} = M.$$

La primitivité de  $\xi$  impliquant la récurrence de la suite  $X_\xi$ , l'automate des préfixes associé à  $\xi$  est fortement connexe. Il existe donc un chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à  $\xi$  partant de 1 et joignant  $i_0$ . Notons  $((a_0, a_1, E_0), (a_1, a_2, E_1), \dots, (a_{l-1}, i_0, E_{l-1}))$  un tel chemin étiqueté, avec donc  $E_0 \neq \varepsilon$  et  $a_0 = 1$ . Pour tout entier  $k$ , on considère le chemin étiqueté suivant :

$$\begin{aligned} & ((a_0, a_1, E_0), (a_1, a_2, E_1), \dots, (a_{l-1}, i_0, E_{l-1}), \\ & \underbrace{(i_0, i_1, M_{i_0, i_1}), \dots, (i_{p-1}, i_p, M_{i_{p-1}, i_p})}_{\text{itéré } k \text{ fois}}). \end{aligned}$$

Ce chemin de longueur  $l + kp$  est reconnaissable par l'automate des préfixes associé à  $\xi$ , commence par 1 et vérifie  $E_0 \neq \varepsilon$ . D'après le (ii) du théorème 4.3 et l'étude précédente, il existe un entier  $N_k$  tel que

$$S^{(f)}(X_{N_k}) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda'(E_j) + k \sum_{j=0}^{p-1} M_{i_j, i_{j+1}} + O(1),$$

et de plus

$$(l + kp) \sim \frac{\log N_k}{\log \theta}.$$

Il vient ainsi

$$S^{(f)}(X_{N_k}) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda'(E_j) + kM|(i_0, i_1, \dots, i_p)| + O(1)$$

et donc

$$S^{(f)}(X_{N_k}) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda'(E_j) + kpM + O(1).$$

Finalement

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S^{(f)}(X_{N_k})}{\log N_k} = \frac{M}{\log \theta}.$$

En considérant un chemin  $(i'_0, i'_1, \dots, i'_p) \in \mathcal{E}l$  vérifiant

$$\frac{P_m(i'_0, i'_1, \dots, i'_p)}{|(i'_0, i'_1, \dots, i'_p)|} = m,$$

on construirait de façon analogue une suite de préfixe de  $X_\xi$ ,  $(X_{N'_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , vérifiant

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S^{(f)}(X_{N'_k})}{\log N'_k} = \frac{m}{\log \theta}.$$

Ceci achève la démonstration d'après les équations (3.4) et (3.5). ■

Le corollaire suivant est à rapprocher des résultats obtenus par Y. Dupain et V. T. Sós [10] et plus récemment par C. Pinner [18].

**COROLLAIRE 5.4.** *L'intervalle  $[0, \beta[$  est à restes majorés (respectivement minorés) si et seulement si  $M = 0$  (respectivement  $m = 0$ ).*

*Preuve.* Le fait que  $\xi(1)$  commence par 1 implique que  $(1, 1, \varepsilon)$  est un chemin étiqueté reconnaissable par l'automate des préfixes associé à  $\sigma$ . Comme  $\lambda'(\varepsilon) = 0$ , on obtient que  $m \leq 0 \leq M$ . Le résultat découle alors immédiatement de l'équation (5.1), obtenue dans la démonstration du théorème 5.1, et de la remarque 3.2. ■

**REMARQUE 5.5.** Soit  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$  un couple tel que  $\alpha$  soit un nombre quadratique,  $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$  et  $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ . Le corollaire 5.4 nous dit que l'on peut alors répondre algorithmiquement, à l'aide de l'algorithme développé dans [1], à la question : l'intervalle  $[0, \beta[$  est-il à restes majorés ou minorés pour la suite  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

**COROLLAIRE 5.6.** *Étant donné un couple  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ , si  $\alpha$  désigne un nombre irrationnel quadratique,  $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$  et  $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ , alors il existe une constante  $c$  strictement positive telle que*

$$\frac{\Delta_N^*(\alpha, \beta)}{\log N} > c$$

pour une infinité d'entiers  $N$ .

*Preuve.* D'après le théorème 5.1, il vient avec les notations précédentes :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n^*(\alpha, \beta)}{\log n} = \frac{1 - \beta}{\log \theta} \max\{|M|, |m|\}.$$

Comme  $(1 - \beta)/\log \theta > 0$ , il suffit de montrer que  $\max\{|M|, |m|\} > 0$  pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  satisfaisant les conditions demandées. Or d'après un théorème de H. Kesten [12], l'intervalle  $[0, \beta[$  est à restes bornés si et seulement si  $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ . Ainsi, pour les couples  $(\alpha, \beta)$  que nous considérons, l'intervalle  $[0, \beta[$  n'est jamais à restes bornés. Nous sommes donc assurés, par le corollaire 5.4, que les quantités  $m$  et  $M$  ne peuvent être simultanément nulles. Ceci implique donc la stricte positivité de  $\max\{|M|, |m|\}$ . ■

Le corollaire 5.6 est à rapprocher des résultats métriques obtenus au début des années 80 par V. T. Sós [27] et à ceux plus généraux obtenus par R. Tijdeman et G. Wagner [28].

THÉORÈME 5.7 (Sós [27]). *Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel. Il existe une constante  $c$ , strictement positive et indépendante de  $\alpha$ , telle que pour presque tout  $\beta$  au sens de la mesure de Lebesgue sur  $]0, 1[$ , on ait*

$$\frac{\Delta_N^*(\alpha, \beta)}{\log N} > c$$

pour une infinité d'entiers  $N$ .

**6. Un exemple détaillé.** Dans ce paragraphe, et afin de clarifier l'étude précédente, nous détaillons notre méthode dans le cas d'un exemple précis. Nous en déduisons, en utilisant un résultat de J. Schoissengeier [24], une propriété sur la discrédance de certaines suites  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Considérons le nombre quadratique  $\alpha = (\sqrt{3} - 1)/2$ . Nous nous intéressons à la répartition de la suite  $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  par rapport à l'intervalle  $[0, 1/2[$ . Notons  $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$u_n = \begin{cases} a & \text{si } \{n\alpha\} \in [0, 1/2[, \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant l'algorithme d'induction que nous décrivons dans [1], G. Rauzy [21] montre que

$$U = \phi(X_\xi),$$

où  $\phi$  est le morphisme de monoïde libre défini par

$$\begin{aligned} \phi : \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \{a, b\}^{\mathbb{N}}, \\ 1 &\mapsto a, \\ 2 &\mapsto abb, \\ 3 &\mapsto ab, \end{aligned}$$

et  $X_\xi$  est l'unique point fixe commençant par 1 de la substitution primitive  $\xi$  définie par

$$\begin{aligned} \xi : \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}, \\ 1 &\mapsto 13, \\ 2 &\mapsto 13223, \\ 3 &\mapsto 1323. \end{aligned}$$

On introduit alors l'application  $f$  définie, comme dans l'équation (3.2), par

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ 1 &\mapsto 1, \\ 2 &\mapsto 1 - 1 - 1 = -1, \\ 3 &\mapsto 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Nous allons à présent calculer les coefficients  $\lambda'(j)$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , introduits

dans l'équation (4.3). La matrice d'incidence de  $\xi$ , notée  $M_\xi$ , est donnée par

$$M_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $M_\xi$  est le polynôme réciproque suivant :

$$P_{M_\xi}(t) = -t^3 + 5t^2 - 5t + 1.$$

On en déduit que  $M_\xi$  admet trois valeurs propres simples réelles qui sont

$$\theta = 2 + \sqrt{3}, \quad 1 \quad \text{et} \quad 1/\theta = 2 - \sqrt{3}.$$

Les coefficients  $\lambda'_{i,j}$ ,  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ , introduits dans l'équation (4.1), sont alors déterminés par les relations

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i,j} \\ \lambda'_{i,j} \\ \lambda''_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 + \sqrt{3} & 1 & 2 - \sqrt{3} \\ (2 + \sqrt{3})^2 & 1 & (2 - \sqrt{3})^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} |\xi^0(j)|_i \\ |\xi(j)|_i \\ |\xi^2(j)|_i \end{pmatrix}.$$

Après calcul, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda'_{1,1} &= 1/2, & \lambda'_{1,2} &= -1/2, & \lambda'_{1,3} &= 0, \\ \lambda'_{2,1} &= -1/2, & \lambda'_{2,2} &= 1/2, & \lambda'_{2,3} &= 0, \\ \lambda'_{3,1} &= 1/2, & \lambda'_{3,2} &= -1/2, & \lambda'_{3,3} &= 0, \end{aligned}$$

puis

$$(6.1) \quad \lambda'(1) = 1, \quad \lambda'(2) = -1, \quad \lambda'(3) = 0,$$

car

$$\lambda'(j) = \sum_{i=1}^3 \lambda'_{i,j} f(i).$$

L'automate des préfixes associé à la substitution  $\xi$  est représenté sur la figure 4.1. À partir de ce dernier et de l'équation (6.1), nous sommes en mesure de représenter les deux automates  $\mathcal{A}_{\max \xi}$  et  $\mathcal{A}_{\min \xi}$ , comme le montrent les figures 6.1 et 6.2.

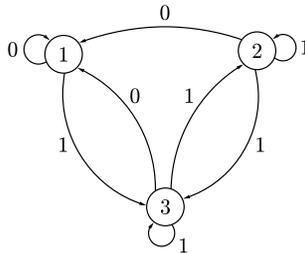
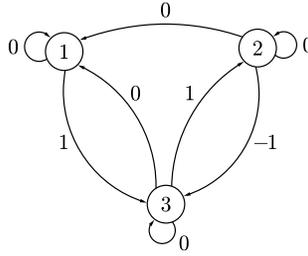


Fig. 6.1. L'automate  $\mathcal{A}_{\max \xi}$

Fig. 6.2. L'automate  $\mathcal{A}_{\min \xi}$ 

On obtient immédiatement,  $M$  et  $m$  désignant les quantités introduites au début du paragraphe 5, que  $M = 1$  et  $m = 0$ . Finalement, le corollaire 5.4 entraîne que l'intervalle  $[0, 1/2[$  est à restes minorés pour la suite  $(n(\frac{\sqrt{3}-1}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$  et donc que l'intervalle  $[1/2, 1[$  est à restes majorés pour la suite  $(n(\frac{\sqrt{3}-1}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$ . De plus, d'après le théorème 5.1, on obtient

$$(6.2) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2})}{\log n} = \frac{1}{2 \log(2 + \sqrt{3})}.$$

En remarquant que le développement en fractions continues de  $(\sqrt{3}-1)/2$  est  $[0; \overline{2, 1}]$ , un résultat de [24] nous dit que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2})}{\log n} = \frac{2}{4 \log(1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1})}.$$

On en déduit alors, d'après l'égalité (6.2), le résultat suivant :

$$(6.3) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2})}{\log n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2})}{\log n}.$$

REMARQUE 6.1. Un résultat identique est vérifié par d'autres couples comme par exemple :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{2} - 1, & \beta &= \frac{1}{2}, \\ \alpha &= \sqrt{2} - 1, & \beta &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \alpha &= \sqrt{2} - 1, & \beta &= \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \\ \alpha &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}, & \beta &= \frac{\sqrt{5}+5}{10}, \dots \end{aligned}$$

QUESTION. On ne connaît pas pour l'instant d'exemple de couple vérifiant les hypothèses du théorème 5.1 pour lequel les conclusions de l'exemple (6.3) ne sont pas vérifiées. Les exemples précédents laissent penser que (6.3)

est vérifié par tout couple  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$  tel que  $\alpha$  soit un nombre quadratique,  $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$  et  $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ . Il serait donc intéressant de déterminer,  $\alpha$  étant fixé, quels sont les éléments  $\beta \in [0, 1[$  pour lesquels le couple  $(\alpha, \beta)$  vérifie les conclusions de (6.3).

Le fait que les conclusions de (6.3) soient vérifiées par tout couple  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$  tel que  $\alpha$  soit un nombre quadratique,  $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$  et  $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  impliquerait que la constante  $c$  intervenant dans le corollaire 5.6 pourrait être choisie indépendamment de  $\beta$  bien sûr, mais également de  $\alpha$ . En effet, d'après un résultat de [11], nous savons que

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n^*(\alpha)}{\log n} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n^*(\sqrt{2} - 1)}{\log n} > 0.$$

Nous serions de plus en mesure d'exhiber une constante optimale donnée donc par

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n^*(\sqrt{2} - 1)}{\log n} = \frac{1}{4 \log(1 + \sqrt{2})}.$$

**Remerciements.** L'auteur tient à remercier l'arbitre pour ses suggestions judicieuses et le soin apporté à la lecture de cet article.

### Références

- [1] B. Adamczewski, *Codages de rotations et phénomènes d'autosimilarité*, J. Théor. Nombres Bordeaux 14 (2002), 351–386.
- [2] C. Baxa, *On the discrepancy of the sequence  $(n\alpha)$* , J. Number Theory 55 (1995), 94–107.
- [3] —, *Comparing the distribution of  $(n\alpha)$ -sequences*, Acta Arith. 94 (2000), 345–363.
- [4] C. Baxa and J. Schoissengeier, *Minimum and maximum order of magnitude of the discrepancy of  $(n\alpha)$* , *ibid.* 68 (1994), 281–290.
- [5] P. Bohl, *Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem*, J. Reine Angew. Math. 135 (1909), 189–283.
- [6] M. Drmota and R. F. Tichy, *Sequences, Discrepancies and Applications*, Springer, Berlin, 1997.
- [7] J.-M. Dumont et A. Thomas, *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions*, Theoret. Comput. Sci. 65 (1989), 153–169.
- [8] Y. Dupain, *Intervalle à restes majorés pour la suite  $\{n\alpha\}$* , Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 29 (1977), 289–303.
- [9] —, *Discrépance de la suite  $\{n\alpha\}$* ,  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29 (1979), xiv, 81–106.
- [10] Y. Dupain and V. T. Sós, *On the one-sided boundedness of discrepancy-function of the sequence  $\{n\alpha\}$* , Acta Arith. 37 (1980), 363–374.
- [11] —, —, *On the discrepancy of  $(n\alpha)$  sequences*, dans : Topics in Classical Number Theory (Budapest, 1981), North-Holland, Amsterdam, 1984, 355–387.
- [12] H. Kesten, *On a conjecture of Erdős and Szűsz related to uniform distribution mod 1*, Acta Arith. 12 (1966/1967), 193–212.

- [13] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Pure Appl. Math., Wiley, New York, 1974.
- [14] J. Lesca, *Sur la répartition modulo 1 de la suite  $n\alpha$* , Acta Arith. 20 (1972), 345–352.
- [15] H. Niederreiter, *Application of Diophantine approximations to numerical integration*, dans : Diophantine Approximation and its Applications (Washington, DC, 1972), Academic Press, New York, 1973, 129–199.
- [16] A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen*, Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), 77–98 et 250–251.
- [17] C. Pinner, *On sums of fractional parts  $\{n\alpha + \gamma\}$* , J. Number Theory 65 (1997), 48–73.
- [18] —, *On the one-sided boundedness of sums of fractional parts  $(\{n\alpha + \gamma\} - \frac{1}{2})$* , ibid. 81 (2000), 170–204.
- [19] L. Ramshaw, *On the discrepancy of the sequence formed by the multiples of an irrational number*, ibid. 13 (1981), 138–175.
- [20] G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France 110 (1982), 147–178.
- [21] —, *Des mots en arithmétique*, dans : Avignon Conference on Language Theory and Algorithmic Complexity (Avignon, 1983), Univ. Claude-Bernard, Lyon, 1984, 103–113.
- [22] —, *Sequences defined by iterated morphisms*, dans : Sequences (Naples/Positano, 1988), Springer, New York, 1990, 275–286.
- [23] J. Schoissengeier, *On the discrepancy of  $(n\alpha)$* , Acta Arith. 44 (1984), 241–279.
- [24] —, *The discrepancy of  $(n\alpha)_{n \geq 1}$* , Math. Ann. 296 (1993), 529–545.
- [25] W. Sierpiński, *Sur la valeur asymptotique d'une certaine somme*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. (Cracovie) A (1910), 9–11.
- [26] —, *Sur une propriété caractéristique des nombres rationnels*, Prace Mat. Fiz. 21 (1910), 1–6 (in Polish).
- [27] V. T. Sós, *On strong irregularities of the distribution of  $\{n\alpha\}$  sequences*, dans : Studies in Pure Math., Birkhäuser, Basel, 1983, 685–700.
- [28] R. Tijdeman and G. Wagner, *A sequence has almost nowhere small discrepancy*, Monatsh. Math. 90 (1980), 315–329.
- [29] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung mod. Eins*, Math. Ann. 77 (1916), 313–352.

Institut de Mathématiques de Luminy  
 CNRS  
 Case 907  
 163 avenue de Luminy  
 13288 Marseille Cedex 9, France  
 E-mail: adamczew@iml.univ-mrs.fr

Adresse courrante:  
 LRI, CNRS UMR 8623  
 Bât. 490, Université Paris-Sud  
 91405 Orsay Cedex, France  
 E-mail: adamczew@lri.fr

Reçu le 4.6.2001  
 et révisé le 2.4.2003

(4043)