

## Propriétés arithmétiques et topologiques d'une classe d'ensembles fractales

par

ALI MESSAOUDI (São José do Rio Preto)

**1. Introduction.** Soit  $a$  un entier naturel non nul. On considère le polynôme  $P_a(x) = x^3 - ax^2 - x - 1$ . Il est connu (voir par exemple [A00]) que  $P_a(x)$  a une racine réelle  $\beta > 1$  et deux racines  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  complexes et conjuguées de module inférieur strictement à 1. Au polynôme  $P_a$ , on peut associer un ensemble  $\mathcal{E}_a \subset \mathbb{C}$  défini par

$$\mathcal{E}_a = \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \mid \forall i \geq 2, \varepsilon_i = 0, 1, \dots, a, \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} <_{\text{lex}} a11, \right. \\ \left. \varepsilon_3 \varepsilon_2 <_{\text{lex}} a1, \varepsilon_2 < a \right\}$$

où  $<_{\text{lex}}$  est l'ordre lexicographique.

Le plus connu des ensembles  $\mathcal{E}_a$  est l'ensemble  $\mathcal{E}_1$  (*fractal de Rauzy*). Il a été introduit par G. Rauzy [R82] dans le but de donner une représentation géométrique du système dynamique symbolique associé à la substitution  $\sigma$  définie par

$$\sigma(1) = 12, \quad \sigma(2) = 13, \quad \sigma(3) = 1.$$

Le fractal de Rauzy (fig. 1) a plusieurs propriétés (voir [M98]) : c'est un compact de  $\mathbb{C}$ , connexe, à frontière fractale et à intérieur simplement connexe et il induit un pavage périodique de  $\mathbb{C}$  modulo  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$  (fig. 2). Il est partagé en trois régions similaires qui induisent un autre pavage non périodique et auto-similaire du plan complexe. Ces régions sont :  $\alpha\mathcal{E}$ ,  $\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}$  et  $\alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3\mathcal{E}$ .

Le fractal de Rauzy a fait l'objet de plusieurs études (voir [R82], [AI1], [IK91], [A00], [M00], [S93]) et peut être relié à différents problèmes :

- Système de numération complexe [M98], [M00].
- Représentation géométrique des systèmes dynamiques symboliques [R82], [IK91], [M98], [S93], [AR91], [AI1], [CS0].

---

2000 *Mathematics Subject Classification*: 28A78, 28A80, 11B39, 11B85, 11K16.

Financé par une bourse du CNPq-Brazil, 302298/2003-7.

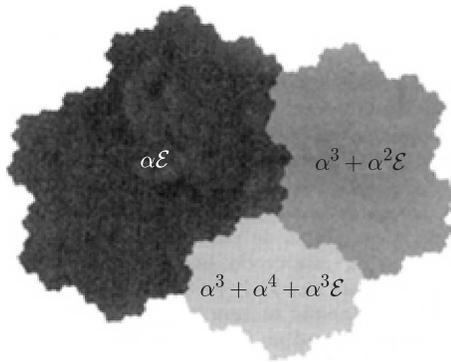


Fig. 1. Fractal de Rauzy  $\mathcal{E}_1$

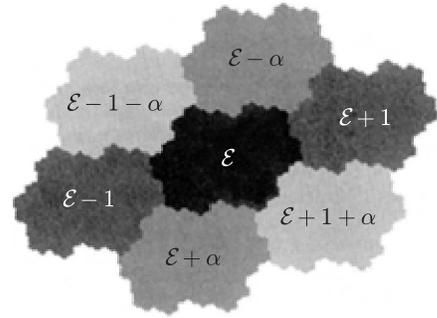


Fig. 2

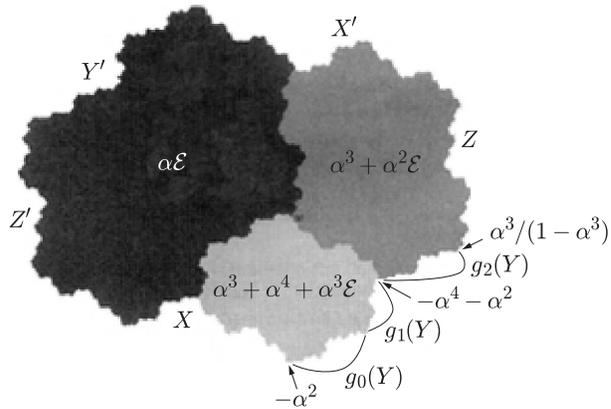


Fig. 3

- Méthode de Dekking pour la construction d'objets fractals [D82], [IK91].
- Fractions continues de dimension deux [HM04].
- Pavages quasi-périodiques du plan [IK91], [A00].
- Partitions de Markov pour les automorphismes hyperboliques du tore  $\mathbb{T}^3$  [M98], [P99].

La frontière du fractal de Rauzy  $\mathcal{E}_1$  a été étudiée par S. Ito et M. Kimura [IK91]. Ils ont montré que c'est une courbe de Jordan engendrée par la méthode de Dekking (voir [D82]) pour la construction d'objets fractals. Dans ce papier, en liant la frontière de  $\mathcal{E}_a$ ,  $a \geq 2$ , aux nombres complexes qui ont plusieurs développements en base  $\alpha$  avec des chiffres dans  $\{0, 1, \dots, a\}$  et satisfaisant une propriété markovienne, nous construisons un automate fini qui engendre cette frontière. Cela nous permet de paramétrer la frontière de  $\mathcal{E}_a$ , de calculer sa dimension de Hausdorff et de montrer que c'est un quasi-cercle. Ces résultats constituent une généralisation du cas  $\mathcal{E}_1$  qui a été étudié dans [M98] et [M00].

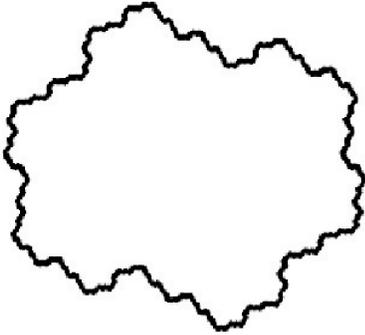


Fig. 4. Frontière de  $\mathcal{E}_1$

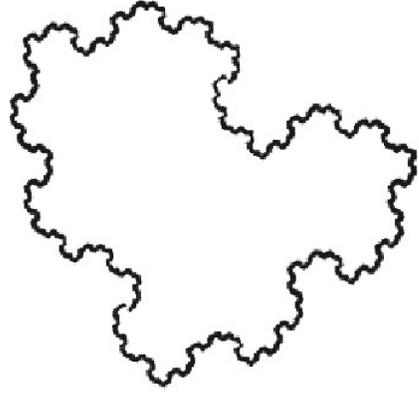


Fig. 5. Frontière de  $\mathcal{E}_2$

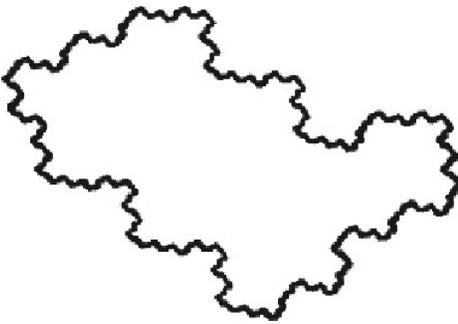


Fig. 6. Frontière de  $\mathcal{E}_3$

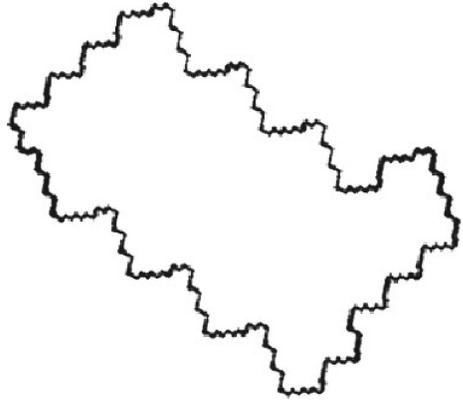


Fig. 7. Frontière de  $\mathcal{E}_4$

**2. Notations et définitions.** Notons  $\mathcal{N}$  l'ensemble des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  appartenant à  $\{0, 1, \dots, a\}^{\mathbb{Z}}$  telles qu'il existe un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que pour tout entier  $n < k$ ,  $a_n = 0$ , et pour tout  $n \geq k + 2$ ,  $a_n a_{n-1} a_{n-2} <_{\text{lex}} a11$ ,  $a_{k+1} a_k <_{\text{lex}} a1$  et  $a_k < a$ . Nous parlerons indifféremment d'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  appartenant à  $\mathcal{N}$  telle que  $a_n = 0$  pour tout  $n < k$  et de la suite  $(a_n)_{n \geq k}$ .

Soit  $(a_n)_{n \geq k}$  un élément de  $\mathcal{N}$ . Supposons qu'il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que pour tout  $n > p$ ,  $a_n = 0$ . Cette suite sera notée  $(a_n)_{k \leq n \leq p}$  et l'ensemble de telles suites,  $\mathcal{N}_f$ .

Un *automate fini* est la donnée de  $(S, A, C)$  où  $A$  est un ensemble fini (alphabet),  $S$  l'ensemble des états, et  $C$  un sous-ensemble de  $S \times S \times A$ .

On ajoute souvent à l'automate un ensemble  $I$  d'états initiaux et un ensemble  $F$  d'états finaux. Dans cet article, on aura besoin seulement de l'ensemble  $I$ . On dit qu'une suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  est *reconnaisable* par l'automate  $(S, A, C)$  s'il existe une suite  $(s_n)_{n \geq 0} \in S^{\mathbb{N}}$  telle que  $(s_{i-1}, s_i, a_i) \in C$  pour tout  $i \geq 1$ .

Soient  $z \in \mathbb{C}$  et  $A \subset \mathbb{C}$ . Nous posons  $A + z = \{x + z \mid x \in A\}$  et  $zA = \{zx \mid x \in A\}$ . Nous notons  $\text{int}(A)$  l'intérieur de  $A$ , et  $\text{Fr}(A)$  la frontière de  $A$ .

### 3. Caractérisation et propriétés de la frontière de $\mathcal{E}_a$

**3.1. Lien avec les substitutions et les systèmes dynamiques.** Soient  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $A^*$  l'ensemble des mots finis sur  $A$ . Soit  $\sigma$  (substitution) l'application de  $A$  à  $A^*$  définie par :

$$\sigma(1) = \underbrace{11 \dots 1}_a 2, \quad \sigma(2) = 13, \quad \sigma(3) = 1.$$

Nous étendons  $\sigma$  à  $A^{\mathbb{N}}$  par concaténation, c'est-à-dire :  $\sigma(a_0 \dots a_n \dots) = \sigma(a_0) \dots \sigma(a_n) \dots$ . Nous pouvons montrer que  $\sigma$  a un unique point fixe, c'est-à-dire il existe  $u \in A^{\mathbb{N}}$  tel que  $\sigma(u) = u$ . Le système dynamique associé à  $\sigma$  est le couple  $(\Omega, S)$  où  $S$  est la fonction décalage définie sur  $A^{\mathbb{N}}$  par  $S(a_0 \dots a_n \dots) = a_1 \dots a_n \dots$ , et  $\Omega$  est l'adhérence (par rapport à la topologie produit des topologies discrètes sur  $A$ ) de l'orbite du point fixe  $u$  par le décalage  $S$ . Ce système dynamique a plusieurs propriétés. En particulier, il possède une unique mesure invariante par  $S$ . Pour plus d'informations sur les substitutions et les systèmes dynamiques associés, voir [Q87] et [P2].

Il est connu ([R82], [AI1]) que  $\Omega$  est métriquement isomorphe à un échange de 3 régions sur un ensemble compact de  $\mathbb{C}$ . En particulier il existe une application continue  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tel que  $f(\Omega) = \mathcal{E}_a$ . En plus, l'ensemble des points où  $f$  n'est pas injective est de mesure nulle et il correspond à la frontière de  $\mathcal{E}_a$ .

Dans la suite, nous noterons  $\mathcal{E}_a$  par  $\mathcal{E}$ .

L'ensemble  $\mathcal{E}$  a plusieurs propriétés. Il est compact, connexe ([R82], [A00]) et son intérieur est simplement connexe ([M2]) et il induit un pavage périodique de  $\mathbb{C}$  modulo  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ , c'est-à-dire

$$\mathbb{C} = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Z}} (\mathcal{E} + p + q\alpha),$$

et pour tous  $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{int}(\mathcal{E} + p + q\alpha) \cap (\mathcal{E} + r + s\alpha) \neq \emptyset$  implique que  $p = r$  et  $q = s$  ([AI1]).

REMARQUE 3.1. Il est connu ([R82], [IK91]) que  $\text{Fr}(\mathcal{E})$  est de mesure nulle. De plus,

$$\text{Fr}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \cap ((\mathcal{E} + \alpha) \cup (\mathcal{E} + 1) \cup (\mathcal{E} + 1 + \alpha) \cup (\mathcal{E} - \alpha) \cup (\mathcal{E} - 1) \cup (\mathcal{E} - 1 - \alpha)),$$

et

$$(1) \quad \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + p + q\alpha) \neq \emptyset \Leftrightarrow p + q\alpha \in \{0, \pm 1, \pm \alpha, \pm(1 + \alpha)\}.$$

**3.2. Lien avec les développements impropres en base  $\alpha$ .** Comme le module de  $\alpha$  est inférieur à 1 et 0 est contenu dans l'intérieur de  $\mathcal{E}$  (cf. [R82]), pour tout nombre complexe  $z$ , il existe un entier  $k$  tel que  $\alpha^k z \in \mathcal{E}$ . Par conséquent tout nombre complexe  $z$  s'écrit en base  $\alpha$  comme

$$z = \sum_{i=l}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i, \quad \text{où } l \in \mathbb{Z} \text{ et } (\varepsilon_i)_{i \geq l} \in \mathcal{N}.$$

La suite  $(\varepsilon_i)_{i \geq l}$  est appelée un  $\alpha$ -développement de  $z$ . En vertu de la remarque 3.1, un point de la frontière de  $\mathcal{E}$  a au moins deux  $\alpha$ -développements. Ces nombres complexes sont caractérisés dans le théorème suivant.

**THÉORÈME 1.** *Il existe un automate fini  $\mathcal{B}$  tel que pour tous  $(a_i)_{i \geq l}$  et  $(b_i)_{i \geq l}$  deux éléments distincts de  $\mathcal{N}$ ,  $\sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$  si et seulement si la suite  $((a_i, b_i))_{i \geq l}$  est reconnaissable par l'automate  $\mathcal{B}$ .*

Ce théorème a été démontrée par Thurston [T90] pour une large classe de nombres  $\alpha$ . Néanmoins sa méthode ne donne pas explicitement les états de l'automate. Ici nous nous proposons de donner ces états.

Pour la preuve nous avons besoin de la proposition suivante.

**PROPOSITION 1.** *Soient  $x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i$  et  $y = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$  où  $l \in \mathbb{Z}$  et les suites  $(a_i)_{i \geq l}$  et  $(b_i)_{i \geq l}$  appartiennent à  $\mathcal{N}$ . Alors  $x = y$  si et seulement si pour tout  $k \geq l$ , nous avons  $\alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k (a_i - b_i) \alpha^i \in S$  où*

$$S = \{0, \pm\alpha, \pm\alpha^2, \pm(\alpha + \alpha^2), \pm(1 + (a - 1)\alpha^2), \pm(1 + a\alpha^2), \pm(1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2)\}.$$

*Preuve.* Voir annexe.

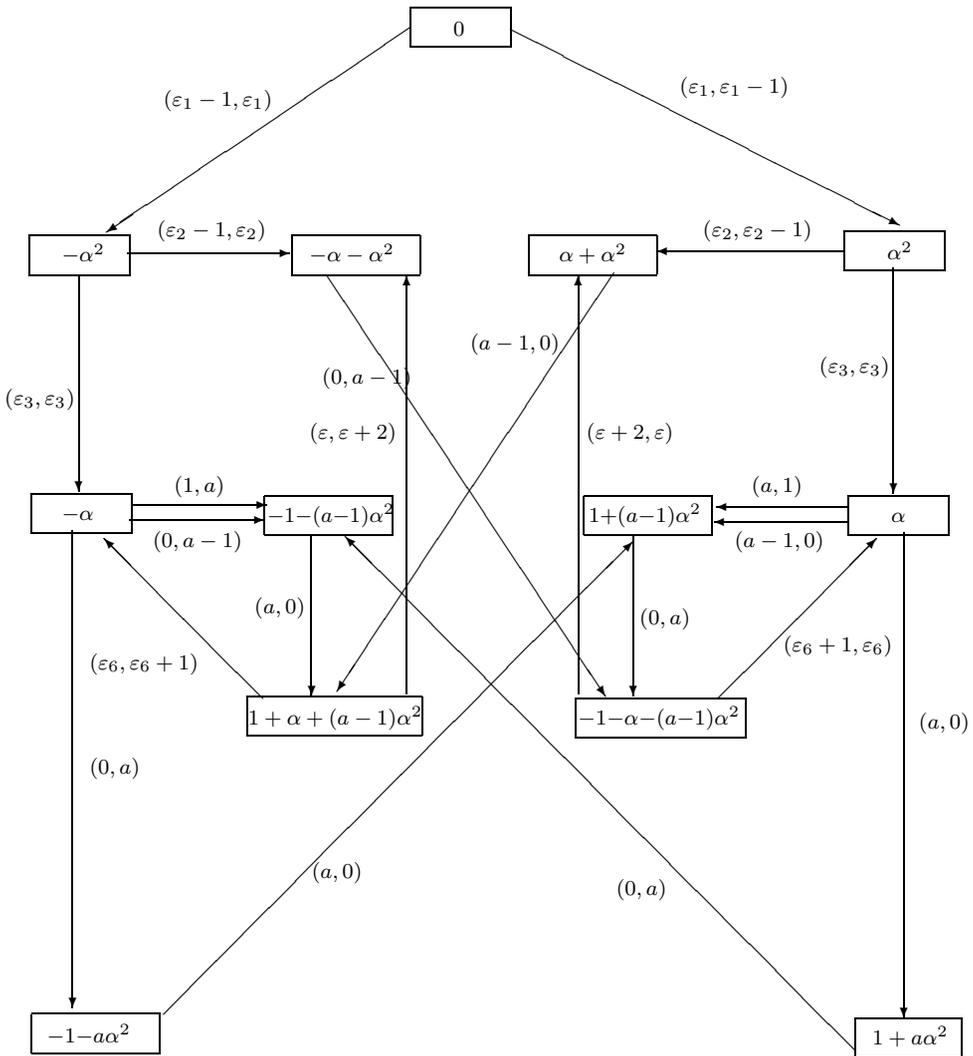
*Preuve du théorème 1.* Soient  $x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i$  et  $y = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$ . Supposons que  $x = y$  et posons  $A_k = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k (a_i - b_i) \alpha^i$  pour  $k \geq l$ . Donc

$$(1) \quad A_{k+1} = \frac{A_k}{\alpha} + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2.$$

Soit  $s$  le plus petit entier tel que  $a_s \neq b_s$ . Donc  $A_i = 0$  pour tout  $i \in \{l, \dots, s - 1\}$ . Supposons que  $a_s > b_s$  et que  $t = a_s - b_s$ . Alors  $A_s = t\alpha^2$ . En vertu de la proposition 1, nous avons  $t = 1$ . Compte tenu de (1) et de la remarque 3.1, nous obtenons

$$A_{s+1} = t\alpha + (a_{s+1} - b_{s+1})\alpha^2 = \begin{cases} \alpha + \alpha^2 & \text{si } a_{s+1} - b_{s+1} = 1, \\ \alpha & \text{si } a_{s+1} = b_{s+1}. \end{cases}$$

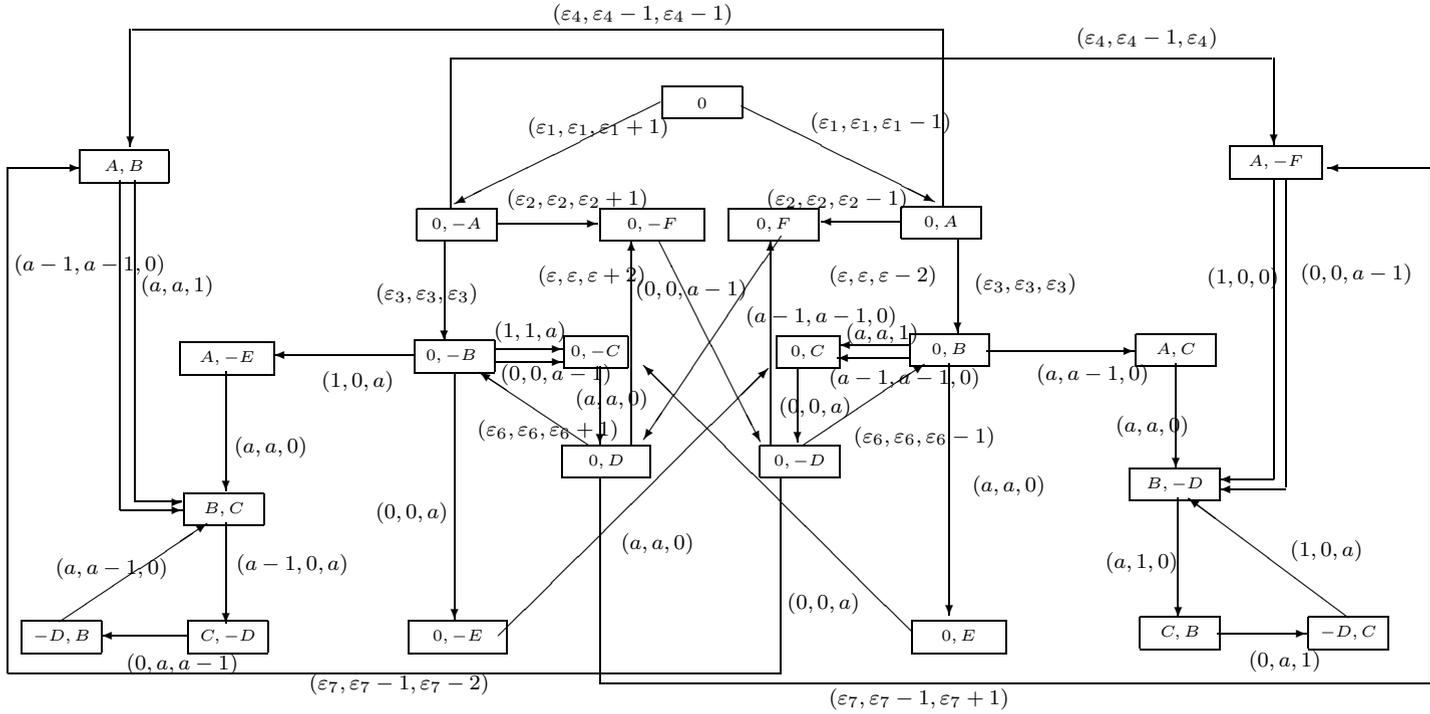
Nous construisons un automate  $\mathcal{B}$  dont les états sont les éléments de  $S$ . Soient  $V$  et  $W$  deux éléments de  $S$ . Nous mettons une flèche étiquetée par  $(x, y)$ , où  $x, y \in \{0, 1, \dots, a\}$ , et allant de  $V$  à  $W$  si et seulement si  $W = V/\alpha + (x - y)\alpha^2$ . Nous prenons 0 pour état initial de l'automate  $\mathcal{B}$ . C'est l'état où les deux  $\alpha$ -développements ne sont pas encore distincts.



Diag. 1

L'état initial est donc lié à l'état  $\alpha^2$  par  $a$  flèches, chacune étiquetée par  $(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - 1)$ , où  $\varepsilon_1 = 1, \dots, a$ . L'état  $\alpha^2$  est lié à l'état  $\alpha + \alpha^2$  par  $a$  flèches, chacune étiquetée par  $(\varepsilon_2, \varepsilon_2 - 1)$ , où  $\varepsilon_2 = 1, \dots, a$ , et à l'état  $\alpha$  par  $a + 1$  flèches, chacune étiquetée par  $(\varepsilon_3, \varepsilon_3)$ , où  $\varepsilon_3 = 0, 1, \dots, a$ . Comme l'ensemble des états  $S$  est fini, nous obtenons un automate fini (diag. 1) (pour tous les états, voir annexe).

**3.2.1. Nombres complexes triples.** Un nombre complexe est dit *triple* s'il a trois  $\alpha$ -développements différents.



Diag. 2. Automate  $\mathcal{C}$  ( $A = \alpha^2$ ,  $B = \alpha$ ,  $C = 1 + (a - 1)\alpha^2$ ,  $D = 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2$ ,  $E = 1 + a\alpha^2$ ,  $F = \alpha + \alpha^2$ )

Soient  $x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i$ ,  $y = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$  et  $z = \sum_{i=l}^{\infty} c_i \alpha^i$ . Supposons que  $x = y = z$ . Pour tout entier  $k \geq l$ , posons  $A_k = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k (a_i - b_i) \alpha^i$ ,  $B_k = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k (b_i - c_i) \alpha^i$ ,  $C_k = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k (c_i - a_i) \alpha^i$  et  $S_k = (A_k, B_k)$ . En vertu de la démonstration du théorème 1,  $S_k \in S \times S$  pour tout  $k \geq l$ .

Nous définissons un automate  $\mathcal{C}$  dont les états sont les  $S_k$ . Deux états  $S_k$  et  $S_{k+1}$  sont liés par des flèches étiquetées par  $(a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1})$ . Nous prenons pour état initial du graphe l'état  $(0, 0)$ . Soit  $t$  le plus petit entier supérieur à  $l$  tel que  $(a_t, b_t, c_t) \neq (a_t, a_t, a_t)$ . Pour simplifier l'automate, nous pouvons toujours supposer que  $(a_t, b_t, c_t) = (x, x, x - 1)$ ,  $x = 1, \dots, a$  ou  $(y, y, y + 1)$ ,  $y = 0, \dots, a - 1$  et qu'il existe un entier  $k > l$  tel que  $a_k = z$  et  $b_k = z - 1$ ,  $z \in \{1, \dots, a\}$  et pour tout  $i \in \{l, \dots, k - 1\}$ ,  $a_i = b_i$ .

Supposons que  $(a_t, b_t, c_t) = (x, x, x - 1)$ ; alors  $S_t = (0, \alpha^2)$ . Donc, en utilisant la relation de récurrence liant  $S_t$  à  $S_{t+1}$ , nous obtenons

$$S_{t+1} = \begin{cases} (0, \alpha + \alpha^2) & \text{si } (a_{t+1}, b_{t+1}, c_{t+1}) = (z + 1, z + 1, z), \\ & z = 0, \dots, a - 1, \\ (0, \alpha) & \text{si } a_{t+1} = b_{t+1} = c_{t+1}, \\ (\alpha^2, \alpha) & \text{si } (a_{t+1}, b_{t+1}, c_{t+1}) = (w, w - 1, w - 1), \\ & w = 1, \dots, a, \\ (-\alpha^2, \alpha + \alpha^2) & \text{si } (a_{t+1}, b_{t+1}, c_{t+1}) = (r, r + 1, r), \\ & r = 0, \dots, a - 1. \end{cases}$$

Nous enlevons les états  $S_{t+1} = (-\alpha^2, \alpha + \alpha^2)$  et  $(\alpha^2, \alpha)$  car sinon, dans ce cas  $(a_{t+1}, b_{t+1}, c_{t+1})$  ne satisfait pas l'hypothèse ci-dessus.

En étudiant tous les cas, nous obtenons un automate  $\mathcal{C}$  (voir diag. 2) et nous avons le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** *Soient  $(a_i)_{i \geq l}, (b_i)_{i \geq l}$  et  $(c_i)_{i \geq l}$  trois éléments distincts de  $\mathcal{N}$ . Alors*

$$\sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} c_i \alpha^i$$

*si et seulement si la suite  $((a_i, b_i, c_i))_{i \geq l}$  est reconnaissable par l'automate  $\mathcal{C}$  (quitte à permuter les suites  $(a_i)_{i \geq l}, (b_i)_{i \geq l}$  et  $(c_i)_{i \geq l}$ ).*

**REMARQUE 3.2.** L'automate  $\mathcal{C}$  est constitué d'une partie centrale qui coïncide avec l'automate  $\mathcal{B}$  (automate des nombres complexes doubles) et de deux cycles. Par conséquent, si  $x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i$  est triple alors la suite  $(a_i)_{i \geq l}$  est ultimement périodique de période  $(a - 1)0a$  ou  $1a0$ . Nous en déduisons que l'ensemble des nombres complexes triples est dénombrable et dense dans  $\mathbb{C}$ .

**PROPOSITION 2.** *Un nombre complexe  $a$  au plus trois  $\alpha$ -développements.*

*Preuve.* Soit  $x$  un nombre complexe ayant au moins quatre  $\alpha$ -développements différents qui sont  $(a_i)_{i \geq l}, (b_i)_{i \geq l}, (c_i)_{i \geq l}$  et  $(d_i)_{i \geq l}$ . Les quatres suites sont ultimement périodiques de même période :  $(a-1)0a$  ou bien  $1a0$ . D'où, deux de ces suites coïncident à partir d'un certain rang. Supposons qu'il existe un entier naturel  $s$  tel que  $a_i = b_i$  pour tout  $i \geq s+1$ . Alors

$$(2) \quad x - \sum_{i=s+1}^{\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^s a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^s b_i \alpha^i.$$

Quitte à multiplier les membres de l'égalité (2) par  $\alpha^{-l+2}$ , nous pouvons supposer que  $l \geq 2$ .

Considérons la suite récurrente  $(T_n)_{n \geq 0}$  définie par  $T_0 = T_1 = 0, T_2 = 1, T_{n+3} = aT_{n+2} + T_{n+1} + T_n$  pour  $n \geq 0$ . Il est facile de voir par récurrence que

$$(3) \quad \alpha^i = T_i \alpha^2 + (T_{i-1} + T_{i-2})\alpha + T_{i-1} \quad \forall i \geq 2.$$

En vertu des relations (2) et (3) et du fait que  $\alpha$  est un nombre algébrique de degré 3, nous avons

$$\sum_{i=l}^s a_i T_i = \sum_{i=l}^s b_i T_i.$$

Comme conséquence de l'algorithme glouton (voir [Pa60]), nous avons  $a_i = b_i$  pour tout  $i \in \{l, \dots, s\}$ , ce qui termine la preuve. ■

REMARQUE. Il est facile de déterminer les points de la frontière de  $\mathcal{E}$  à partir de l'automate des nombres complexes doubles, car un point de la frontière a au moins deux  $\alpha$ -développements :  $(a_n)_{n \geq 2}$  et  $(b_n)_{n \geq l}$  où  $l < 2$  et  $b_l \neq 0$ .

**4. Paramétrisation de la frontière de  $\mathcal{E}$ .** Nous notons les six régions (fig. 2) constituant la frontière de  $\mathcal{E}$  par  $X = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \alpha), Y = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha), Z = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1), X' = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} - \alpha), Y' = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} - 1 - \alpha)$  et  $Z' = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} - 1)$ .

LEMME 1. *Les relations suivantes sont vérifiées :*

- (i)  $X \cap Y = \{-\alpha^2\}$ .
- (ii)  $Y \cap Z = \left\{ \frac{a\alpha^3 + (a-1)\alpha^4}{1-\alpha^3} \right\}$ .
- (iii)  $Z \cap X' = \{-\alpha^2 - \alpha\}$ .
- (iv)  $X' \cap Y' = \left\{ \frac{a\alpha^3 + (a-1)\alpha^4}{1-\alpha^3} - 1 - \alpha \right\} = \left\{ \frac{a\alpha^2}{1-\alpha} \right\}$ .
- (v)  $Y' \cap Z' = \{-\alpha^2 - \alpha - 1\}$ .
- (vi)  $Z' \cap X = \left\{ \frac{a\alpha^3 + (a-1)\alpha^4}{1-\alpha^3} - 1 \right\} = \left\{ \alpha + \frac{a\alpha^2}{1-\alpha} \right\}$ .

*Preuve.* Soit  $z$  un élément de  $X \cap Y = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \alpha) \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha)$ . D'après l'automate  $\mathcal{C}$ ,

$$\begin{aligned} z &= \alpha + a\alpha^3 + \sum_{i=2}^{\infty} (\alpha^{3i-1} + a\alpha^{3i}) = 1 + \alpha + (a-1)\alpha^2 + \sum_{i=2}^{\infty} (\alpha^{3i-2} + a\alpha^{3i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{3i} + a\alpha^{3i+1}) = -\alpha^2. \end{aligned}$$

De même, l'ensemble  $Y \cap Z = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1) \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha)$  est réduit à un singleton  $\{x\}$  où

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{\infty} (a\alpha^{3i} + (a-1)\alpha^{3i+1}) \\ &= 1 + (a-1)\alpha^2 + \sum_{i=2}^{\infty} (a\alpha^{3i-2} + (a-1)\alpha^{3i-1}) \\ &= 1 + \alpha + (a-1)\alpha^2 + (a-1)\alpha^3 + \sum_{i=2}^{\infty} (a\alpha^{3i-1} + (a-1)\alpha^{3i}) \\ &= (a\alpha^3 + (a-1)\alpha^4)/(1 - \alpha^3). \end{aligned}$$

Les autres relations découlent du fait que  $Z \cap X' = (X \cap Y) - \alpha$ ,  $X' \cap Y' = (Y \cap Z) - 1 - \alpha$ ,  $Y' \cap Z' = (X \cap Y) - 1 - \alpha$  et  $Z' \cap X = (Y \cap Z) - 1$ . ■

LEMME 2. *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i)  $Y = 1 + \alpha + (a-1)\alpha^2 + \alpha X$ .
- (ii)  $Z = a\alpha^3 + \alpha^2 X$ .
- (iii)  $X' = -\alpha + X$ .
- (iv)  $Y' = (a-1)\alpha^2 + \alpha X$ .
- (v)  $Z' = \alpha + a\alpha^2 + (a-1)\alpha^3 + \alpha^2 X$ .

*Preuve.* (i) Soit  $z$  un élément de  $Y$ . En vertu de l'automate  $\mathcal{B}$ , nous avons

$$z = 1 + \alpha + (a-1)\alpha^2 + \alpha w_1 = k\alpha^3 + \alpha^2 w'_1$$

où  $k \in \{1, \dots, a\}$  et  $w_1, w'_1 \in \mathcal{E}$ . Donc

$$\frac{z - 1 - \alpha - (a-1)\alpha^2}{\alpha} = w_1 = \alpha + (k-1)\alpha^2 + \alpha w'_1 \in X.$$

Réciproquement, si  $z$  appartient à  $X$ , alors

$$\alpha z + 1 + \alpha + (a-1)\alpha^2 \in (\alpha\mathcal{E} + 1 + \alpha + (a-1)\alpha^2) \cap (\alpha\mathcal{E} + \alpha^3) \subset Y.$$

(ii) Soit  $z$  un élément de  $Z$ , donc d'après l'automate  $\mathcal{B}$ ,  $z = 1 + (a-1)\alpha^2 + k\alpha^4 + \alpha^3 w = a\alpha^3 + \alpha^2 w'$  où  $k \in \{1, \dots, a\}$  et  $w, w' \in \mathcal{E}$ , d'où

$$\frac{z - a\alpha^3}{\alpha^2} = \alpha + (k-1)\alpha^2 + \alpha w = w' \in X.$$

Par ailleurs,  $a\alpha^3 + \alpha^2 X = (a\alpha^3 + \alpha^2 \mathcal{E}) \cap ((a+1)\alpha^3 + \alpha^2 \mathcal{E})$ . Comme  $(a+1)\alpha^3 = 1 + (a-1)\alpha^2 + \alpha^4$ , nous avons  $a\alpha^3 + \alpha^2 X \subset Z$ . Il en résulte que

$$Z = \alpha^3 + \alpha^2 X.$$

Les autres relations découlent des relations

$$Y' = Y - 1 - \alpha, \quad Z' = Z - 1, \quad X' = X - \alpha.$$

D'où le lemme. ■

Maintenant, nous allons étudier l'ensemble  $Y$ . Nous allons montrer que  $Y$  est auto-affine et partagé en  $2a + 1$  régions similaires et que chacune de ses régions correspond à l'image de  $Y$  par l'une des  $2a + 1$  fonctions  $g_i$ ,  $i = 0, \dots, 2a$  (voir fig. 3) définies par :

$$\begin{aligned} g_0(z) &= \alpha^3 + a\alpha^4 + \alpha^3 z, & g_1(z) &= 1 + \alpha + (a-1)\alpha^2 + a\alpha^5 + \alpha^4 z, \\ g_{2k}(z) &= k\alpha^3 + (a-1)\alpha^4 + \alpha^3 z, & \forall k &= 1, \dots, a, \\ g_{2k+1}(z) &= 1 + \alpha + (a-1)\alpha^2 + (k-1)\alpha^3 + \alpha^2 z, & \forall k &= 1, \dots, a-1. \end{aligned}$$

REMARQUE 4.1. Les fonctions  $g_i$  sont obtenus à partir de l'automate  $\mathcal{B}$ .

Pour cela, nous nous servons du lemme suivant.

LEMME 3. *L'ensemble  $Y$  vérifie les propriétés suivantes :*

- (i)  $Y = \bigcup_{k=0}^{2a} g_k(Y)$ .
- (ii) Pour tous  $i, j \in \{0, \dots, 2a\}$ ,

$$g_i(Y) \cap g_j(Y) \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \leq |i - j| \leq 1.$$

*En particulier*

$$\begin{aligned} g_{2k}(Y) \cap g_{2k+1}(Y) &= \{g_{2k}(y_0)\} = \{g_{2k+1}(y_0)\}, & \forall k &= 0, \dots, a-1, \\ g_{2k-1}(Y) \cap g_{2k}(Y) &= \{g_{2k-1}(x_0)\} = \{g_{2k}(x_0)\}, & \forall k &= 1, \dots, a, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} x_0 &= -\alpha^2, \\ y_0 &= (1 + \alpha) + a\alpha^2 / (1 - \alpha) = (a\alpha^3 + (a-1)\alpha^4) / (1 - \alpha^3). \end{aligned}$$

*Preuve.* (i) Puisque  $Y = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha)$ , nous avons

$$\begin{aligned} g_0(Y) &= (\alpha^3 + a\alpha^4 + \alpha^3 \mathcal{E}) \cap (2\alpha^3 + (a+1)\alpha^4 + \alpha^3 \mathcal{E}) \\ &= (\alpha^3 + a\alpha^4 + \alpha^3 \mathcal{E}) \cap (1 + \alpha + (a-1)\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^3 \mathcal{E}) \subset Y. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} g_1(Y) &= (1 + \alpha + (a-1)\alpha^2 + a\alpha^5 + \alpha^4 \mathcal{E}) \\ &\quad \cap (1 + \alpha + (a-1)\alpha^2 + \alpha^4 + (a+1)\alpha^5 + \alpha^4 \mathcal{E}) \\ &= (1 + \alpha + (a-1)\alpha^2 + a\alpha^5 + \alpha^4 \mathcal{E}) \cap (\alpha^3 + a\alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^4 \mathcal{E}) \subset Y. \end{aligned}$$

Pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} g_{2k+1}(Y) &= (1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 + (k - 1)\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}) \\ &\quad \cap ((k + 1)\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}) \subset Y, \\ g_{2k}(Y) &= (k\alpha^3 + (a - 1)\alpha^4 + \alpha^3\mathcal{E}) \cap ((k + 1)\alpha^3 + a\alpha^4 + \alpha^3\mathcal{E}) \\ &= (k\alpha^3 + (a - 1)\alpha^4 + \alpha^3\mathcal{E}) \\ &\quad \cap (1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 + (k - 1)\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^3\mathcal{E}) \subset Y. \end{aligned}$$

Donc,

$$\bigcup_{k=0}^{2a} g_k(Y) \subset Y.$$

Soit  $z$  un élément de  $Y$ . En vertu de l'automate  $\mathcal{B}$ , nous avons quatre cas :

•  $z = 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 + \alpha^4 + a\alpha^5 + \alpha^4w_0 = \alpha^3 + a\alpha^4 + \alpha^3w'_0$  où  $w_0, w'_0 \in \mathcal{E}$ . Dans ce cas,

$$g_0^{-1}(z) = 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 + \alpha w_0 = w'_0 \in Y, \quad \text{d'où } z \in g_0(Y).$$

•  $z = 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 + a\alpha^5 + a\alpha^7 + \alpha^6w_1 = \alpha^3 + a\alpha^4 + a\alpha^6 + (a - 1)\alpha^7 + \alpha^6w'_1$  où  $w_1, w'_1 \in \mathcal{E}$ . Donc

$$\begin{aligned} g_1^{-1}(z) &= a\alpha^3 + \alpha^2w_1 \\ &= 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 + (a - 1)\alpha^3 + \alpha^2w'_1 \in Y, \quad \text{d'où } z \in g_1(Y). \end{aligned}$$

•  $z = 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 + (k - 1)\alpha^3 + a\alpha^5 + \alpha^4w_2 = k\alpha^3 + (a - 1)\alpha^4 + \alpha^3w'_2$  où  $w_2, w'_2 \in \mathcal{E}$  et  $k \in \{1, \dots, a\}$ . Alors

$$g_{2k}^{-1}(z) = 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 + \alpha w_2 = w'_2, \quad \text{d'où } z \in g_{2k}(Y).$$

•  $z = 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 + (k - 2)\alpha^3 + \alpha^2w_2 = k\alpha^3 + (a - 1)\alpha^4 + \alpha^3w'_2$  où  $w_2, w'_2 \in \mathcal{E}$  et  $k \in \{2, \dots, a\}$ . Alors

$$g_{2k-1}^{-1}(z) = 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 + \alpha w'_2 = w_2, \quad \text{d'où } z \in g_{2k-1}(Y).$$

Par conséquent,

$$Y = \bigcup_{k=0}^{2a} g_k(Y).$$

(ii) Soient  $k \geq 1$  et  $z \in g_{2k}(Y) \cap g_{2k+1}(Y)$ . Ils existent  $x$  et  $y$  éléments de  $Y$  tels que  $y = 1 + (a - 1)\alpha^2 + \alpha x$ . Donc

$$y \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1) \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha) = Y \cap Z.$$

D'où  $y = x = y_0$ . Par conséquent,

$$g_{2k}(Y) \cap g_{2k+1}(Y) = \{g_{2k}(y_0)\} = \{g_{2k+1}(y_0)\}.$$

De même nous pouvons montrer que  $g_0(Y) \cap g_1(Y) = \{g_0(y_0)\} = \{g_1(y_0)\}$ .

Soit  $z \in g_{2k+1}(Y) \cap g_{2k+2}(Y)$ ,  $k \geq 1$ . D'où ils existent  $x$  et  $y$  éléments de  $Y$  tels que  $y = x/\alpha + \alpha - \alpha^2$ . D'après l'automate  $\mathcal{B}$ , nous avons

$$x = 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 + k\alpha^3 + \alpha^2 t = m\alpha^3 + \alpha^2 t', \quad t, t' \in \mathcal{E}, m > 0.$$

D'où  $y = \alpha + (m - 1)\alpha^2 + \alpha t \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \alpha) \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha) = X \cap Y = \{-\alpha^2\}$ . Par conséquent,  $x = y = -\alpha^2$ . D'où

$$g_{2k+1}(Y) \cap g_{2k+2}(Y) = \{g_{2k+1}(x_0)\} = \{g_{2k+2}(x_0)\}, \quad \forall k = 1, \dots, a - 1.$$

De même nous montrons que  $g_1(Y) \cap g_2(Y) = \{g_1(x_0)\} = \{g_2(x_0)\}$ .

Maintenant supposons que  $i, j \in \{0, \dots, 2a\}$  tels que  $|i - j| > 1$ .

CAS 1 :  $i = 2k$  et  $j = 2l$  où  $k, l \geq 1$ . Supposons que  $l > k$  et que  $g_i(Y) \cap g_j(Y) \neq \emptyset$ . D'où ils existent  $x, y \in Y$  tels que  $x + l - k = y$ . Donc en vertu de la remarque 3.1, nous avons  $l - k = 1$ . Par suite  $y \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1) \cap (\mathcal{E} + 2 + \alpha)$ . Absurde, car  $\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 2 + \alpha) = \emptyset$ .

CAS 2 :  $i = 0$  et  $j = 2l$  où  $l \geq 1$ . Supposons que  $g_i(Y) \cap g_j(Y) \neq \emptyset$ . D'où ils existent  $x, y \in Y$  tels que  $x + \alpha - (l - 1) = y$ . D'où  $y \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \alpha - (l - 1)) \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha)$ . Donc  $l = 1$ . Par suite,  $y \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1 + 2\alpha) = \emptyset$ . Absurde.

CAS 3 :  $i = 2k$  et  $j = 2l + 1$  où  $k, l \geq 1$ . Supposons que  $g_i(Y) \cap g_j(Y) \neq \emptyset$ , d'où

$$\exists x, y \in Y, \quad 1 + (k - l)\alpha + (a - 1)\alpha^2 + \alpha x = y.$$

Par suite  $y \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha) \cap (\mathcal{E} + 1 + (k - l)\alpha)$ . Par conséquent,  $k = l$  ou  $k = l + 1$ , absurde car  $|i - j| > 1$ . D'où  $g_i(Y) \cap g_j(Y) = \emptyset$ .

De même nous montrons que  $g_i(Y) \cap g_j(Y) = \emptyset$  si  $k = 0$  ou  $l = 0$ .

CAS 4 :  $i$  et  $j$  impairs. Ce cas, laissé au lecteur, se traite de la même façon. ■

**4.1. Paramétrisation de  $Y$ .** Soit  $z$  un élément de  $Y$ . En vertu du lemme 3, il existe  $z_1$  appartenant à  $Y$  et  $a_0$  élément de  $\{0, 1, \dots, 2a\}$  tels que  $z = g_{a_0}(z_1)$ . De proche en proche, nous construisons une suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  dans  $\{0, 1, \dots, 2a\}^{\mathbb{N}}$  et une suite  $(z_n)_{n \geq 0}$  dans  $Y$ , telles que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$z = g_{a_0} \circ g_{a_1} \circ \dots \circ g_{a_n}(z_{n+1}).$$

Comme les fonctions  $g_i$  sont contractantes, pour tout  $x$  élément de  $Y$  la suite  $g_{a_0} \circ g_{a_1} \circ \dots \circ g_{a_n}(x)$  tend vers  $z$  quand  $n$  tend vers l'infini. Considérons l'application

$$\psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}, \quad a_1 a_2 \dots \mapsto b_1 b_2 \dots,$$

où  $b_1 = a_1$  et pour tout  $k \geq 2$ ,  $b_k = a_k$  si  $\sum_{i=1}^{k-1} a_i$  est pair et  $2a - a_k$  sinon.

Soit  $g : [0, 1] \rightarrow Y$  la correspondance définie de la façon suivante : si  $t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(2a + 1)^{-i}$  où  $(a_i)_{i \geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$  alors

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ \dots \circ g_{b_n}(x_0) \quad \text{où} \quad b_1 b_2 \dots = \psi(a_1 a_2 \dots).$$

Dans tout ce qui suit, nous supposons que si  $t$  et  $t'$  appartiennent à  $[0, 1]$  alors  $t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(2a + 1)^{-i}$  et  $t' = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(2a + 1)^{-i}$  où  $a_i$  et  $b_i$  sont des éléments de  $\{0, 1, \dots, 2a\}$  tels que  $a_i = b_i$  pour  $i < k$  et  $a_k < b_k$  où  $k \in \mathbb{N}$ . Nous supposons que  $g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{c_1} \dots g_{c_n}(x_0)$  et  $g(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{d_1} \dots g_{d_n}(x_0)$  où  $c_1 c_2 \dots = \psi(a_1 a_2 \dots)$  et  $d_1 d_2 \dots = \psi(b_1 b_2 \dots)$ .

PROPOSITION 3. *La correspondance  $g$  ainsi définie est une application bijective, continue et vérifie*

$$g(0) = x_0 = -\alpha^2 \quad \text{et} \quad g(1) = y_0 = (1 + \alpha) + a\alpha^2 / (1 - \alpha).$$

Pour la preuve, nous avons besoin des lemmes suivants.

LEMME 4. *Soient  $t$  et  $t'$  deux éléments de  $[0, 1]$ .*

- (i) *Si  $|t - t'| < (2a + 1)^{-N}$ ,  $N > k$ , alors  $b_k = a_k + 1$ ,  $b_i = 0$  et  $a_i = 2a$  pour tout  $i$  vérifiant  $k + 1 \leq i \leq N$ .*
- (ii) *Si  $t = t'$  alors  $b_k = a_k + 1$ ,  $b_i = 0$  et  $a_i = 2a$  pour tout  $i \geq k + 1$ .*

*Preuve.* La relation (i) provient du fait que :

$$\begin{aligned} (2a + 1)^{-N} &> \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)(2a + 1)^{-i} \\ &= (b_k - a_k)(2a + 1)^{-k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (b_i - a_i)(2a + 1)^{-i} \\ &= (b_k - a_k - 1)(2a + 1)^{-k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (2a + b_i - a_i)(2a + 1)^{-i}. \end{aligned}$$

La relation (ii) est une conséquence immédiate de la relation (i). ■

*Preuve de la proposition 3*

$g$  est bien définie. En effet: si  $t = t'$ , alors d'après le lemme 4,  $b_k = a_k + 1$ ,  $b_i = 0$  et  $a_i = 2a$  pour tout  $i > k$ . Donc

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{c_1} \dots g_{c_n}(x_0) \quad \text{et} \quad g(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{d_1} \dots g_{d_n}(x_0)$$

où  $c_1 c_2 \dots = \psi(a_1 a_2 \dots)$  et  $d_1 d_2 \dots = \psi(b_1 b_2 \dots)$ . Comme  $a_i = b_i$ , nous avons  $c_i = d_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k - 1$ .

CAS 1 :  $\sum_{i=1}^{k-1} a_i$  et  $a_k$  sont pairs. Dans ce cas,  $c_k = a_k$ ,  $d_k = b_k =$

$a_k + 1, c_i = d_i = 2a$  pour tout  $i > k$ . Donc

$$g(t) = g_{c_1} \circ \dots \circ g_{c_{k-1}} \circ g_{a_k} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g_{2a}^n(y_0) \right),$$

$$g(t') = g_{c_1} \circ \dots \circ g_{c_{k-1}} \circ g_{a_k+1} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g_{2a}^n(y_0) \right).$$

Comme  $g_{2a}(y_0) = y_0$  et  $g_{a_k}(y_0) = g_{a_k+1}(y_0)$  pour  $a_k$  pair, nous avons  $g(t) = g(t')$ .

CAS 2 :  $\sum_{i=1}^{k-1} a_i$  est impair et  $a_k$  est pair. Nous avons  $c_k = 2a - a_k, d_k = 2a - a_k - 1$  et  $c_i = d_i = 0$  pour tout  $i > k$ . Donc

$$g(t) = g_{c_1} \circ \dots \circ g_{c_{k-1}} \circ g_{2a-a_k} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g_0^n(x_0) \right),$$

$$g(t') = g_{c_1} \circ \dots \circ g_{c_{k-1}} \circ g_{2a-a_k-1} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g_0^n(x_0) \right).$$

Comme  $g_0(x_0) = x_0$  et  $g_{2p-1}(x_0) = g_{2p}(x_0)$  pour tout  $p = 1, \dots, 2a$ , nous avons  $g(t) = g(t')$ .

Les deux autres cas se font de la même façon.

$g$  est injective. Comme  $c_i = d_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k - 1$ , nous avons  $g(t) = g(t')$  si et seulement si

$$(4) \quad g_{c_k} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g_{c_{k+1}} \circ \dots \circ g_{c_n}(y_0) \right) = g_{d_k} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g_{d_{k+1}} \circ \dots \circ g_{d_n}(y_0) \right).$$

CAS 1 :  $\sum_{i=1}^{k-1} a_i$  et  $a_k$  sont pairs. Dans ce cas  $c_k = a_k$  et  $d_k = b_k$ . Comme  $a_k > b_k$  (hypothèse), nous avons  $d_k > c_k$ . En vertu du lemme 3 (item (ii)) et de la relation (4), nous avons  $d_k = c_k + 1$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{c_{k+1}} \circ \dots \circ g_{c_n}(y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{d_{k+1}} \circ \dots \circ g_{d_n}(y_0) = y_0.$$

Comme

$$g_i(z) = y_0 \Leftrightarrow i = 2a \text{ et } z = y_0,$$

nous avons  $c_i = d_i = 2a$  pour tout  $i \geq k+1$ . Comme pour tout  $i \geq k+1, c_i = a_i$  et  $d_i = 2a - b_i$ , nous avons  $a_i = 2a$  et  $b_i = 0$  pour tout  $i \geq k+1$ . D'où  $t = t'$ .

CAS 2 :  $\sum_{i=1}^{k-1} a_i$  pair et  $a_k$  impair. Dans ce cas  $c_k = a_k$  et  $d_k = b_k = a_k + 1$ . Par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{c_{k+1}} \circ \dots \circ g_{c_n}(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{d_{k+1}} \circ \dots \circ g_{d_n}(x_0) = x_0$ . D'où  $c_i = d_i = 0$  pour tout  $i \geq k+1$ . Comme pour tout  $i > k, c_i = 2a - a_i$  et  $d_i = b_i$ , nous avons  $a_i = 2a$  et  $b_i = 0$  pour tout  $i > k$ . Donc  $t = t'$ .

Les deux autres cas se font de la même façon.

Puisque  $g$  est surjective par construction, elle est bijective.

$g$  est continue. Supposons que  $0 < |t - t'| < (2a + 1)^{-N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et  $N > k$ . Le lemme 4 entraîne que  $b_k = a_k + 1, b_i = 0$  et  $a_i = 2a$  pour tout  $i$  vérifiant  $k + 1 \leq i \leq N$ .

CAS 1 :  $\sum_{i=1}^{k-1} a_i$  et  $a_k$  sont pairs. Dans ce cas

$$|g(t) - g(t')| = |g_{c_1} \circ \dots \circ g_{c_{k-1}} \circ g_{a_k+1} \circ g_{2a}^{N-K}(z_1) - g_{c_1} \circ \dots \circ g_{c_{k-1}} \circ g_{a_k} \circ g_{2a}^{N-K}(z_2)|$$

où  $z_1, z_2 \in Y$ . D'où

$$|g(t) - g(t')| \leq |\alpha|^{2(k-1)} |g_{a_k+1} \circ g_{2a}^{N-K}(z_1) - g_{a_k} \circ g_{2a}^{N-K}(z_2)|.$$

Comme  $g_{a_k} \circ g_{2a}^{N-K}(y_0) = g_{a_k+1} \circ g_{2a}^{N-K}(y_0)$ , nous déduisons que

$$|g(t) - g(t')| \leq |\alpha|^{2(k-1)} (|\alpha|^{3(N-k)+2} + |\alpha|^{3(N-k)+3}) \text{diam}(Y).$$

Par conséquent,

$$|g(t) - g(t')| \leq \text{diam}(Y)(1 + |\alpha|)|\alpha|^{2N}.$$

CAS 2 :  $\sum_{i=1}^{k-1} a_i$  est pair et  $a_k$  est impair. Dans ce cas nous pouvons montrer que

$$|g(t) - g(t')| \leq |\alpha|^{2(k-1)} |g_{a_k+1} \circ g_0^{N-K}(z_1) - g_{a_k} \circ g_0^{N-K}(z_2)|.$$

Par conséquent,

$$(*) \quad |g(t) - g(t')| \leq \text{diam}(Y)(1 + |\alpha|)|\alpha|^{2N}.$$

Dans les deux autres cas nous pouvons montrer que la relation (\*) est vraie. Par conséquent,  $g$  est continue.

PROPOSITION 4. *L'application  $g$  est  $\delta = -2 \ln |\alpha| / \ln(2a + 1)$  Hölder continue.*

*Preuve.* Soient  $t, t' \in [0, 1]$ . Supposons

$$(2a + 1)^{-N-1} \leq |t - t'| < (2a + 1)^{-N} \quad \text{où } N \in \mathbb{N}.$$

- Si  $N > k$ , alors  $|g(t) - g(t')| \leq \text{diam}(Y)(1 + |\alpha|)|\alpha|^{2N}$  (voir ci-dessus).
- Si  $N \leq k$ , alors

$$\begin{aligned} |g(t) - g(t')| &= |g_{c_1} \cdots g_{c_{k-1}}(z_1) - g_{c_1} \cdots g_{c_{k-1}}(z'_1)| \\ &\leq \text{diam}(Y)|\alpha|^{2(k-1)} \leq \text{diam}(Y)(1 + |\alpha|)|\alpha|^{2(N-1)}. \end{aligned}$$

D'où dans les deux cas, nous avons

$$|g(t) - g(t')| \leq |\alpha|^{-2} (1 + |\alpha|) \text{diam}(Y) e^{2N \ln |\alpha|}.$$

Comme

$$N - 1 \leq -\frac{\ln |t - t'|}{\ln(s + 1)} - 1 < N,$$

nous avons

$$|g(t) - g(t')| \leq C|t - t'|^\delta,$$

où  $C = (1 + |\alpha|)|\alpha|^{-2} \text{diam}(Y)$ .

Ceci termine la preuve. ■

*Paramétrisation de  $\text{Fr}(\mathcal{E})$*  (voir figs. 4-7). Posons  $Y_0 = Y, Y_1 = Z, Y_2 = X', Y_3 = Y', Y_4 = Z', Y_5 = X$ .

En vertu du lemme 2, pour tout  $i = 0, \dots, 5$  nous avons  $Y_i = F_i(Y)$  où les  $F_i$  sont les fonctions définies par

$$\begin{aligned} F_0(z) &= z, \\ F_1(z) &= 1 + (a - 1)\alpha^2 + \alpha z, \\ F_2(z) &= -\alpha^2 + z/\alpha, \\ F_3(z) &= z - 1 - \alpha, \\ F_4(z) &= (a - 1)\alpha^2 + \alpha z, \\ F_5(z) &= -1/\alpha - 1 - (a - 1)\alpha + z/\alpha = -\alpha^2 + \alpha + z/\alpha. \end{aligned}$$

En utilisant les fonctions  $F_i$  et  $g$ , nous définissons une application continue et bijective de  $[0, 1]$  dans  $Y_i$  par

$$h_i(t) = \begin{cases} F_i \circ g(t) & \text{si } i \text{ est pair,} \\ F_i \circ g(1 - t) & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Maintenant, considérons la correspondance  $f : [0, 1] \rightarrow \text{Fr}(\mathcal{E})$  définie par : si  $t = \sum_{i=1}^\infty a_i 6^{-i}$  où  $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  alors

$$f(t) = \begin{cases} F_{a_1} \circ g(6t - a_1) & \text{si } a_1 \text{ est pair,} \\ F_{a_1} \circ g(1 + a_1 - 6t) & \text{si } a_1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

**THÉORÈME 3.** *La correspondance  $f$  est une application bijective et continue sur  $]0, 1[$ . En plus  $f(0) = f(1)$  et  $f$  est  $\delta = -2 \ln |\alpha| / \ln(2a + 1)$  Hölder continue.*

*Calcul de la dimension de Hausdorff.* Comme  $\text{Fr}(\mathcal{E})$  est l'union de six régions qui sont chacune l'image de  $Y$  par une transformation affine (voir lemme 2), nous avons  $\dim_{\text{H}}(Y) = \dim_{\text{H}}(\text{Fr}(\mathcal{E}))$ . L'ensemble  $Y = \bigcup_{i=0}^{2a} g_i(Y)$  (voir lemme 3) entre dans le cadre des compacts invariants par des similitudes (il est stable par les  $g_i$ ). La dimension de Hausdorff de cette classe de compact est majorée par sa dimension fractale et dans des cas, elle lui est égale.

**THÉORÈME 4** (voir [F90]). *Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  tel que  $A = \bigcup_{i=0}^n f_i(A)$  est le compact invariant par des similitudes  $f_i$  de coefficients de similitudes  $r_i$  (i.e.  $|f_i(x) - f_i(y)| = r_i|x - y|$  pour  $x, y \in \mathbb{C}$ ). Alors  $\dim_{\text{H}}(A) \leq s$  où  $s$  est l'unique réel vérifiant  $\sum_{i=0}^n r_i^s = 1$ . Si de plus il existe un ouvert  $O$  de  $\mathbb{C}$  tel que  $f_i(O) \subset O$  pour tout  $i$  et  $f_i(O) \cap f_j(O) = \emptyset$  pour tous  $i \neq j$ , alors  $\dim_{\text{H}}(A) = s$ .*

Soit  $(a_i)_{0 \leq i \leq m} \in \mathcal{N}_f$ . Notons

$$C_{a_0 \dots a_m} = \left\{ z = \sum_{i=0}^m a_i \alpha^i + \sum_{i=m+1}^\infty d_i \alpha^i \text{ où } a_0 \dots a_m d_{m+1} d_{m+2} \dots \in \mathcal{N} \right\}.$$

PROPOSITION 5. Soit  $U = \text{int}(C_{00010000})$  et  $O = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup g_{i_p} \circ \dots \circ g_{i_2} \circ g_{i_1}(U)$  où  $i_1, \dots, i_p = 0, 1, \dots, 2a$ . Alors pour tous  $i, j \in \{0, \dots, 2a\}$ ,

- (i)  $g_i(O) \subset O$ ,
- (ii)  $g_i(O) \cap g_j(O) = \emptyset$  si  $i \neq j$ .

LEMME 5. Soit  $a_0 \dots a_m \in \mathcal{N}_f$ ,  $m \geq 3$ . Si  $\text{int}(C_{a_0 \dots a_m}) = g_{i_p} \circ \dots \circ g_{i_1}(U)$ , alors  $a_0 \dots a_m$  ne contient pas quatre "0" consécutifs sauf peut être à la fin.

Preuve. Un simple calcul montre que :

$$\begin{aligned} g_0(C_{00b_2 \dots b_m}) &= C_{0001ab_2 \dots b_m}, \\ g_1(C_{00b_2 \dots b_m}) &= C_{11(a-1)00ab_2 \dots b_m}, \\ g_{2k+1}(C_{00b_2 \dots b_m}) &= C_{11(a-1)(k-1)b_2 \dots b_m}, \quad \forall k = 1, \dots, a-1, \\ g_{2k}(C_{00b_2 \dots b_m}) &= C_{000k(a-1)b_2 \dots b_m}, \quad \forall k = 1, \dots, a, \\ g_0(C_{11(a-1)b_3 \dots b_m}) &= C_{11(a-1)01ab_3 \dots b_m}, \\ g_1(C_{11(a-1)b_3 \dots b_m}) &= C_{0001a0ab_3 \dots b_m}, \\ g_{2k+1}(C_{11(a-1)b_3 \dots b_m}) &= C_{000(k+1)(a-1)b_3 \dots b_m}, \quad \forall k = 1, \dots, a-1, \\ g_{2k}(C_{11(a-1)b_3 \dots b_m}) &= C_{11(a-1)k0ab_3 \dots b_m}, \quad \forall k = 1, \dots, a. \end{aligned}$$

Montrons le lemme 5 par récurrence sur  $p$ . Si  $p = 1$ , c'est évident. Supposons la propriété du lemme 5 est vraie à l'ordre  $p - 1$ . Nous avons  $g_{i_p} \circ \dots \circ g_{i_1}(U) = g_{i_p}(\text{int}(C_{d_0 \dots d_l})) = \text{int}(C_{a_0 \dots a_m})$ . Par les relations ci-dessus, nous déduisons que la propriété du lemme est vraie à l'ordre  $p$ .

LEMME 6. Soient  $a_0 \dots a_m$  et  $b_0 \dots b_l \in \mathcal{N}_f$  où  $m, l \geq 3$ , et  $a_0a_1, b_0b_1 \in \{00, 11\}$ . S'il existe  $i_1, \dots, i_p \in \{0, 1, \dots, 2a\}$  tels que

$$g_{i_p} \circ \dots \circ g_{i_1}(\text{int}(C_{b_0 \dots b_l})) = \text{int}(C_{a_0 \dots a_m}),$$

alors  $(i_1, \dots, i_p)$  est uniquement déterminé.

Preuve. D'après la définition des  $g_i$ , nous avons :

1. Si  $b_0b_1 = 00$ , alors

- si  $a_{m-l} = 1$  et  $a_{m-l+1} = a$  alors  $i_1 = 0$ ,
- si  $a_{m-l} = a - 1$  et  $a_{m-l+1} = k - 1$ ,  $k = 1, \dots, a - 1$ , alors  $i_1 = 2k + 1$ ,
- si  $a_{m-l} = k$  et  $a_{m-l+1} = a - 1$ ,  $k = 1, \dots, a$  alors  $i_1 = 2k$ .

2. Si  $b_0b_1b_2 = 11(a - 1)$ , alors

- si  $a_{m-l+2} = a$  et  $a_{m-l+1} = 1$  alors  $i_1 = 0$ ,
- si  $a_{m-l+2} = a$  et  $a_{m-l+1} = a_{m-l-2} = 0$  alors  $i_1 = 1$ ,
- si  $a_{m-l+2} = a - 1$  et  $a_{m-l+1} = k + 1$ ,  $k = 1, \dots, a - 1$ , alors  $i_1 = 2k + 1$ ,
- si  $a_{m-l+2} = a$  et  $a_{m-l+1} = 0$ ,  $a_{m-l} = k$ ,  $a_{m-l-2} = 1$ ,  $k = 1, \dots, a - 1$ , alors  $i_1 = 2k$ .

D'où  $i_1$  est uniquement déterminé. Nous appliquons le même procédé à  $g_{i_1}(\text{int}(C_{b_0\dots b_k}))$  et  $\text{int}(C_{a_0\dots a_m})$  pour obtenir que  $i_2$  est uniquement déterminé. En continuant le même procédé, nous obtenons le lemme. ■

*Preuve de la proposition 5.* (i) est évident.

(ii) Supposons que  $g_{i_p} \circ \dots \circ g_{i_1}(U) = \text{int}(C_{a_0\dots a_m})$  et  $g_{j_s} \circ \dots \circ g_{j_1}(U) = \text{int}(C_{d_0\dots d_k})$  où  $m \geq k$ . Supposons que

$$g_{i_p} \circ \dots \circ g_{i_1}(U) \cap g_{j_s} \circ \dots \circ g_{j_1}(U) \neq \emptyset.$$

Comme l'ensemble des nombres complexes qui ont au moins deux  $\alpha$ -développements est de mesure nulle (voir 3.1), nous avons  $a_i = d_i$  pour  $0 \leq i \leq k$ . Comme  $U = \text{int}(C_{00010000})$ , nous avons  $a_k = a_{k-1} = a_{k-2} = a_{k-3} = 0$ , donc et en vertu du lemme 5, nous avons  $k = m$ . Le lemme 6 implique que  $(i_p, \dots, i_1) = (j_s, \dots, j_1)$ . Ceci termine la preuve. ■

Nous déduisons de la proposition 5 et du théorème 4 que  $\dim_{\mathbb{H}}(\text{Fr}(\mathcal{E})) = \dim_{\mathbb{H}}(Y) = r$  où  $r$  vérifie

$$(a + 1)|\alpha|^{3r} + (a - 1)|\alpha|^{2r} + |\alpha|^{4r} = 1.$$

Nous en concluons le théorème suivant :

**THÉORÈME 5.** *Nous avons  $\dim_{\mathbb{H}}(\text{Fr}(\mathcal{E})) = \log \varrho / \log |\alpha|$  où  $\varrho$  est la racine réelle maximale du polynôme  $x^4 + (a + 1)x^3 + (a - 1)x^2 - 1 = 0$ .*

**4.2. La frontière de  $\mathcal{E}$  est un quasi-cercle.** Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $\mathcal{J}$  où  $\mathcal{J}$  est une courbe de Jordan. Soit  $I(x, y)$  l'arc de  $\mathcal{J}$  orienté positivement et  $\text{diam}(I(x, y))$  le diamètre de cet arc. On dit que  $\mathcal{J}$  vérifie les conditions d'Ahlfors, s'il existe un réel positif  $k$  tel que :

$$\forall x, y \in \mathcal{J}, \quad \min(\text{diam}(I(x, y)), \text{diam}(I(y, x))) \leq k|x - y|.$$

**THÉORÈME 6** (voir [L86]). *Si  $\mathcal{J}$  vérifie les conditions d'Ahlfors, alors  $\mathcal{J}$  est un quasi-cercle.*

Nous allons donc montrer que  $\text{Fr}(\mathcal{E})$  vérifie les conditions d'Ahlfors ; pour cela, nous avons besoin de la proposition suivante.

**PROPOSITION 6.** *Il existe un réel strictement positif  $k$  tel que si  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$  alors  $|g(t_1) - g(t_0)| \leq k|g(t_2) - g(t_0)|$ .*

*Preuve.* Posons  $s = 2a$  et divisons l'intervalle  $[0, 1]$  en  $4a + 1$  sous intervalles  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, 4a + 1$  où

$$A_{2p+1} = \left[ \frac{p}{s+1}, \frac{p+1}{s+1} \right], \quad p = 0, \dots, 2a,$$

et

$$A_{2p} = \left[ \frac{p}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}, \frac{p}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \right], \quad p = 1, \dots, 2a.$$

Soit  $\theta_0 = -\alpha^3 - \alpha^4 - \alpha^5$ . Il est facile de vérifier que pour tout  $k = 2, \dots, 2a$ ,

$$(5) \quad g_k \circ g_{2a}(z) = g_{k+1} \circ g_1(z) + \theta_0 \quad \text{si } k \text{ est pair}$$

et

$$(6) \quad g_k \circ g_{2a}(z) = g_k \circ g_0(z) + \theta_0 \quad \text{si } k \text{ est impair.}$$

Par conséquent, si  $k$  est pair alors

$$\begin{aligned} g\left[\frac{k+1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}, \frac{k+1}{s+1}\right] &= g_k \circ g_{2a}(Y) = g_{k+1} \circ g_1(Y) + \theta_0 \\ &= g\left[\frac{k+2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}, \frac{k+2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right] + \theta_0. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} g\left[\frac{k+1}{s+1}, \frac{k+1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right] &= g_{k+1} \circ g_{2a}(Y) = g_{k+1} \circ g_0(Y) + \theta_0 \\ &= g\left[\frac{k+2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}, \frac{k+2}{s+1}\right] + \theta_0. \end{aligned}$$

D'où

$$g\left[\frac{k+1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}, \frac{k+1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right] = g\left[\frac{k+2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}, \frac{k+2}{s+1}\right] + \theta_0.$$

Par conséquent, pour tout entier pair  $k \in \{2, \dots, 2a-1\}$ , nous avons

$$(7) \quad g(A_{2k+2}) \subset g(A_{2k+3}) + \theta_0.$$

De même, en utilisant les relations  $g_0 \circ g_{2a}(z) = g_1 \circ g_2(z) + \theta_1$ , où  $\theta_1 = (a-1)\alpha^7$ , nous pouvons montrer que

$$(8) \quad g(A_2) \subset g(A_3) + \theta_1.$$

Posons  $\theta_2 = \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6$ . Il est facile de vérifier que pour tout  $k = 0, \dots, 2a-1$ ,

$$(9) \quad g_k \circ g_0(z) = g_k \circ g_{2a}(z) + \theta_2 \quad \text{si } k \text{ est pair}$$

et

$$(10) \quad g_k \circ g_0(z) = g_{k+1} \circ g_{2a-1}(z) + \theta_2 \quad \text{si } k \text{ est impair.}$$

Par conséquent, si  $k$  est impair, alors par la relation (10), nous avons

$$\begin{aligned} g\left[\frac{k+1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}, \frac{k+1}{s+1}\right] &= g_k \circ g_0(Y) = g_{k+1} \circ g_{2a-1}(Y) + \theta_2 \\ &= g\left[\frac{k+2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}, \frac{k+2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right] + \theta_2. \end{aligned}$$

De même, si  $k$  est impair, en appliquant la formule (9) à  $k+1$ , nous avons

$$g\left[\frac{k+1}{s+1}, \frac{k+1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right] = g\left[\frac{k+2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}, \frac{k+2}{s+1}\right] + \theta_1.$$

D'où

$$g\left[\frac{k+1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}, \frac{k+1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right] = g\left[\frac{k+2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}, \frac{k+2}{s+1}\right] + \theta_1.$$

Par conséquent, pour tout entier impair  $k \in \{0, \dots, 2a - 1\}$ , nous avons

$$(11) \quad g(A_{2k+2}) \subset g(A_{2k+3}) + \theta_2.$$

Par ailleurs, nous avons deux cas :

- (i) Il existe  $i$  appartenant à  $\{1, \dots, 4a + 1\}$  tel que  $g(t_0), g(t_2)$  appartiennent à  $g(A_i)$ .
- (ii) Il n'existe pas  $i$  tel que  $g(t_0)$  et  $g(t_2)$  appartiennent à  $g(A_i)$ .

Supposons que l'on est dans le cas (ii). Soit  $p$  le minimum des distances entre deux points de  $Y$  vérifiant (ii) ; d'après la construction des  $A_i$ ,  $p$  est strictement positif. Puisque  $p \leq |g(t_2) - g(t_0)|$ , nous avons

$$|g(t_1) - g(t_0)| \leq \frac{\text{diam}(Y)}{p} |g(t_2) - g(t_0)|.$$

Il suffit donc de prendre  $k = \text{diam}(Y)/p$ .

Si on est dans le cas (i), alors, en vertu des relations (7), (8) et (11) nous pouvons toujours se ramener au cas où  $t_0$  et  $t_2$  appartiennent à  $A_i$  où  $i \in \{1, 3, 5, \dots, 4a + 1\}$ .

Posons  $i = 2k + 1$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, 2a\}$ , et définissons l'application  $h$  de  $[0, 1]$  dans lui même par

$$h(t) = \begin{cases} (2a + 1)t - k & \text{si } k \text{ est pair et } t \in A_{2k+1}, \\ 1 + k - (2a + 1)t & \text{si } k \text{ est impair et } t \in A_{2k+1}. \end{cases}$$

Nous pouvons vérifier que

$$g_k \circ g(h(t_0)) = g(t_0), \quad g_k \circ g(h(t_2)) = g(t_2).$$

Pour avoir le lemme, il suffit d'avoir

$$|g(h(t_1)) - g(h(t_0))| \leq k|g(h(t_2)) - g(h(t_0))|.$$

Par ailleurs

$$|\alpha^{-2}| \cdot |g(t_0) - g(t_2)| \leq |g(h(t_0)) - g(h(t_2))| \leq |\alpha^{-4}| \cdot |g(t_0) - g(t_2)|.$$

Comme  $\alpha$  est de module inférieur strictement à 1, en appliquant  $h$  un nombre fini de fois, on obtient un couple  $(h^n(t_0), h^n(t_2))$  appartenant à  $Y$  et vérifiant

$$|g(h^n(t_0)) - g(h^n(t_2))| \geq p.$$

On prend  $k = \text{diam}(Y)/p$  et on obtient

$$|g(h^n(t_1)) - g(h^n(t_0))| \leq k|g(h^n(t_0)) - g(h^n(t_2))|.$$

Comme  $t_1$  appartient à  $A_i$ , nous avons  $|g(t_1) - g(t_0)| \leq k|g(t_2) - g(t_0)|$ . Ceci termine la preuve. ■

THÉORÈME 7. *Il existe un réel positif  $k$  tel que pour tous  $x$  et  $y$  appartenant à  $\text{Fr}(\mathcal{E})$  nous avons*

$$\inf(\text{diam}(I(x, y)), \text{diam}(I(y, x))) \leq k|x - y|.$$

*En particulier  $\text{Fr}(\mathcal{E})$  est un quasi-cercle.*

*Preuve.* D'après le lemme 2, nous avons  $X' = F(Y)$  et  $X = G(Y)$ , où  $F(z) = -\alpha^2 + z/\alpha$  et  $G(z) = -\alpha^2 + \alpha + z/\alpha$ . Soit  $\psi_0(z) = F \circ g_0 \circ F^{-1}(z) = a\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^3z$ . Soit  $\phi_{2a}(z) = G \circ g_{2a} \circ G^{-1}(z) = (a - 1)\alpha^2 + a\alpha^4 + \alpha^3z$ .

La frontière de  $\mathcal{E}$  est l'union des arcs :  $B_1 = Y \cup Z$ ,  $B_2 = Z \cup \psi_0(X')$ ,  $B_3 = X' \cup Y'$ ,  $B_4 = Y' \cup Z'$ ,  $B_5 = Z' \cup \phi_{2a}(X)$ ,  $B_6 = X \cup Y$ .

En utilisant le lemme 2, nous montrons qu'il existe des applications affines  $\mathcal{H}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , telles que  $\mathcal{H}_i(B_i) \subset Y$  pour tout  $i$ . Ces applications sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(z) &= \alpha^3 + a\alpha^4 + \alpha^3z, & \mathcal{H}_2(z) &= \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha^2z, \\ \mathcal{H}_3(z) &= 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 + a\alpha^5 + \alpha^3z, & \mathcal{H}_4(z) &= 2\alpha^3 + \alpha^2z, \\ \mathcal{H}_5(z) &= 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 - (a - 1)\alpha^3 + \alpha z, \\ \mathcal{H}_6(z) &= (a - 1)\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^3z. \end{aligned}$$

En effet, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(Y \cup Z) &= g_0(Y) \cup g_1(Y), & \mathcal{H}_2(Z \cup \psi_0(X')) &= g_1(Y) \cup g_2(Y), \\ \mathcal{H}_3(X' \cup Y') &= g_2(Y) \cup g_3(Y), & \mathcal{H}_4(Y' \cup Z') &= g_2(Y) \cup g_3(Y), \\ \mathcal{H}_5(Y' \cup Z') &= g_2(Y) \cup g_3(Y), & \mathcal{H}_6(Y' \cup Z') &= g_1(Y) \cup g_2(Y). \end{aligned}$$

Soient  $x$  et  $y$  appartenant à  $\text{Fr}(\mathcal{E})$  ; alors nous avons deux cas :

- $x$  et  $y$  appartiennent à l'un des arcs  $B_i$ . Dans ce cas,  $\mathcal{H}_i(x)$ ,  $\mathcal{H}_i(y)$  appartiennent à  $Y$  et il résulte de la proposition 6 que :

$$\inf(\text{diam}(I(\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_i(y))), \text{diam}(I(\mathcal{H}_i(y), \mathcal{H}_i(x)))) \leq k|\mathcal{H}_i(x) - \mathcal{H}_i(y)|,$$

d'où le résultat.

- $x$  et  $y$  n'appartiennent pas au même arc  $B_i$ . Donc d'après la construction des  $B_i$ ,  $x$  et  $y$  n'appartiennent pas à deux arcs successifs de  $\text{Fr}(\mathcal{E})$ , d'où, il existe un réel strictement positif  $d$  tel que  $|x - y| \geq d$ . Il suffit donc de prendre  $k = \text{diam}(\text{Fr}(\mathcal{E}))/d$  pour avoir le théorème. ■

REMARQUE. Il a été prouvé (voir [G82], [BP93]) que la frontière du fractal du Dragon est un quasi-cercle. Ceci motive la question suivante : Parmi les courbes générées par la méthode de Dekking, quelles sont celles qui sont quasi-cercles?

**5. Annexe**

*Preuve de la proposition 1.* Supposons que  $\alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k (a_i - b_i) \alpha^i \in S$ . D'où le nombre  $\alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k (a_i - b_i) \alpha^i$  est borné indépendamment de  $k$ . Par conséquent,  $\sum_{i=l}^\infty a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^\infty b_i \alpha^i$ .

Montrons l'implication directe. Soient  $x = \sum_{i=l}^\infty c_i \alpha^i$  et  $y = \sum_{i=l}^\infty d_i \alpha^i$  tels que  $x = y$ . Quitte à multiplier par  $\alpha^{-l}$ , nous pouvons supposer que  $l = 0$ . Pour tout  $k \geq l$ , posons  $A_k = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k (c_i - d_i) \alpha^i$ . Donc

$$(12) \quad A_{k+1} = \frac{A_k}{\alpha} + (c_{k+1} - d_{k+1}) \alpha^2.$$

Supposons sans perte de généralité que  $c_0 = d_0$  et que  $c_1 > d_1$ . D'où  $A_0 = 0$ . Soit  $z = (x - d_0 - d_1 \alpha - d_2 \alpha^2) / \alpha$ . Nous avons

$$z = c_1 - d_1 + (c_2 - d_2) \alpha + \sum_{i=3}^\infty c_i \alpha^{i-1} = \sum_{i=3}^\infty d_i \alpha^{i-1}.$$

1.  $A_0 = 0$ .

- Si  $c_3 < a$  et  $d_3 < a$ , on a  $z \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + c_1 - d_1 + (c_2 - d_2) \alpha)$ . Donc, en vertu de la remarque 3.1,  $c_1 - d_1 = 1$  et  $c_2 - d_2 = 0$  ou  $1$ . Nous déduisons par (12) que  $A_1 = \alpha^2$  et  $A_2 = \alpha$  si  $c_2 = d_2$  ou  $A_2 = \alpha + \alpha^2$  si  $c_2 = d_2 + 1$ .
- Si  $d_3 = a$  alors quitte à considérer  $z - c_3 \alpha^2$ , nous pouvons supposer que  $c_3 = 0$ . D'où  $z + 1 + \alpha = 1 + (c_1 - d_1) + (c_2 + 1 - d_2) \alpha + \sum_{i=3}^\infty c_i \alpha^{i-1} = (d_4 + 1) \alpha^3 + \sum_{i=5}^\infty d_i \alpha^i$ . Comme  $d_4 d_3 \leq_{\text{lex}} a1$  et  $d_3 = a \geq 2$ , nous avons  $d_4 \leq a - 1$ . D'où  $z + 1 + \alpha \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1 + c_1 - d_1 + (c_2 - d_2) \alpha)$ . Absurde car  $1 + c_1 - d_1 \geq 2$ .
- Si  $c_3 = a$  alors quitte à considérer  $z - d_3 \alpha^2$ , nous pouvons supposer que  $d_3 = 0$ . D'où  $z = (c_1 - d_1 - 1) + (c_2 - d_2 - 1) \alpha + (c_4 + 1) \alpha^3 + \sum_{i=5}^\infty c_i \alpha^{i-1} = \sum_{i=4}^\infty d_i \alpha^{i-1}$ . D'où  $c_1 = d_1 + 1$  ou  $c_1 = d_1 + 2$ . Comme  $c_3 c_2 c_1 <_{\text{lex}} a11$  et  $c_3 = a$ , nous avons  $c_2 = 0$ . Si  $c_1 = d_1 + 2$  alors  $z \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1 + (-1 - d_2) \alpha)$ . Absurde. D'où  $c_1 = d_1 + 1$  et nous avons  $A_1 = \alpha^2$  et  $A_2 = \alpha$ .

2. Si  $A_2 = \alpha$ , alors posons  $w = (z + \alpha + (a - c_3) \alpha^2) / \alpha$ . Nous avons  $w = (c_4 + 1) \alpha^2 + \sum_{i=5}^\infty c_i \alpha^{i-2} = 1 + (a - c_3 + d_3) \alpha + \sum_{i=4}^\infty d_i \alpha^{i-2}$ .

- Si  $c_4 < a - 1$  et  $d_4 < a$  alors  $c_3 - d_3 = a$  ou  $a - 1$ . En vertu de la relation (12), nous avons  $A_3 = 1 + (a - 1) \alpha^2$  si  $(c_3, d_3) = (a - 1, 0)$  ou  $(a, 1)$ , ou  $A_3 = 1 + a \alpha^2$  si  $(a_3, b_3) = (a, 0)$ .
- Si  $c_4 \geq a - 1$  ou  $d_4 \geq a$  alors ce cas, laissé au lecteur, est traité de la même manière que dans le cas  $A_1 = 0$ ,  $c_3 = a$  ou  $d_3 = a$ .

3. Si  $A_3 = 1 + (a - 1) \alpha^2$  alors en posant  $t = x - d_0 - d_1 \alpha - d_2 \alpha^2 - d_3 \alpha^3 + \alpha + \alpha^2$ , nous avons  $t = (1 + c_4) \alpha^4 + \sum_{i=5}^\infty c_i \alpha^i = \alpha^2 + \alpha^3 + \sum_{i=4}^\infty d_i \alpha^i$ .

D'où  $(t + (a - d_4)\alpha^4)/\alpha^3 = (a + 1 + c_4 - d_4)\alpha + \sum_{i=5}^{\infty} c_i\alpha^{i-3} = (d_5 + 1)\alpha^2 + \sum_{i=6}^{\infty} d_i\alpha^{i-3}$ .

- Si  $c_5 < a$  et  $d_5 < a - 1$ , on a  $a + 1 + c_4 - d_4 = 0$  ou  $1$ . D'où  $(c_4, d_4) = (0, a)$  et  $A_4 = -1 - \alpha - (a - 1)\alpha^2$ .
  - Si  $c_5 \geq a - 1$  ou  $d_5 \geq a - 1$ , on raisonne de la même manière que dans le cas  $A_1 = 0$ ,  $c_3 = a$  ou  $d_3 = a$ .
4. Si  $A_4 = -1 - \alpha - (a - 1)\alpha^2$  et  $r = (x - d_0 - d_1\alpha - d_2\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^3)/\alpha^4 - \alpha$ , alors  $r = 1 + (c_5 - 1)\alpha + \sum_{i=6}^{\infty} c_i\alpha^{i-4} = d_5\alpha + \sum_{i=6}^{\infty} d_i\alpha^{i-4}$ . Donc comme dans le cas 1, nous avons  $c_5 - d_5 - 1 = 0$  ou  $1$ . Par suite, en vertu de la relation (12),  $A_5 = \alpha$  si  $c_5 = d_5 + 1$  ou  $A_5 = \alpha + \alpha^2$  si  $c_5 = d_5 + 2$ .
  5. Si  $A_3 = 1 + a\alpha^2$  on a  $(x - d_0 - d_1\alpha - d_2\alpha^2)/\alpha + 1 = (c_4 + 1)\alpha^2 + \sum_{i=5}^{\infty} c_i\alpha^{i-2} = 1 + \sum_{i=4}^{\infty} d_i\alpha^{i-2}$ . Comme dans le cas 2, nous déduisons que  $(d_4, c_4 + 1) = (a, 1)$  ou  $(a - 1, 0)$ . D'où  $d_4 = a$  et  $c_4 = 0$ . Par suite  $A_4 = -1 - (a - 1)\alpha^2 = -(1 + (a - 1)\alpha^2)$  (l'état  $1 + (a - 1)\alpha^2$  a été déjà rencontré).
  6. Si  $A_2 = \alpha + \alpha^2$  on a  $t = x - d_0 - d_1\alpha - d_2\alpha^2 + (a - c_3)\alpha^3 = (c_4 + 1)\alpha^4 + \sum_{i=5}^{\infty} c_i\alpha^i = (a - c_3 + d_3)\alpha^3 + \sum_{i=4}^{\infty} d_i\alpha^{i-1}$ .
    - Si  $c_4 + 1 < a$  et  $d_4 < a$  on a  $t/\alpha^2 \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + (a + d_3 - c_3)\alpha)$ . D'où  $a + d_3 - c_3 = 0$  ou  $\pm 1$ . Par suite,  $(c_3, d_3) = (a, 0)$  ou  $(a, 1)$  ou  $(a - 1, 0)$ . Le cas  $c_3 = a$  est exclu car  $c_3c_2c_1 <_{\text{lex}} a11$  et  $c_1, c_2 \geq 1$ . Par conséquent,  $(c_3, d_3) = (a - 1, 0)$  et  $A_3 = 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2 = -(-1 - \alpha - (a - 1)\alpha^2)$  (l'état  $-1 - \alpha - (a - 1)\alpha^2$  a été déjà rencontré).
    - Si  $c_4 \geq a - 1$  ou  $d_4 \geq a$  on raisonne de la même manière que dans le cas  $A_1 = 0$ ,  $c_3 \geq a$  ou  $d_3 \geq a$ .

Jusqu'à présent, nous avons trouvé les états  $0, \alpha^2, \alpha, \alpha + \alpha^2, 1 + (a - 1)\alpha^2, 1 + a\alpha^2, -1 - \alpha - (a - 1)\alpha^2, -1 - (a - 1)\alpha^2, 1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2, -\alpha - \alpha^2$ . En supposant que  $c_1 < d_1$ , nous retrouvons les opposés des nombres ci-dessus. Notons par  $\mathcal{T}$  l'ensemble des suites finies construites jusqu'à présent et par  $\mathcal{D}$  l'ensemble  $\{(c_i, d_i)_{i \geq 1} \mid (c_i)_{i \geq 1}, (d_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{N} \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} c_i\alpha^i = \sum_{i=1}^{\infty} d_i\alpha^i\}$ .

Maintenant, nous allons montrer que  $S = \{0, \pm\alpha, \pm\alpha^2, \pm(\alpha + \alpha^2), \pm(1 + (a - 1)\alpha^2), \pm(1 + a\alpha^2), \pm(1 + \alpha + (a - 1)\alpha^2)\}$ .

Soit  $t \in \mathbb{C} \setminus S$  tel qu'il existe  $(a_i, b_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{D}$  et  $k_0 \in \mathbb{N}$  tels que  $t = \alpha^{-k_0+2} \sum_{i=0}^{k_0} (a_i - b_i)\alpha^i$ . Posons  $A_k = \alpha^{-k+2} \sum_{i=0}^k (a_i - b_i)\alpha^i$ . Nous pouvons toujours supposer que  $A_k \in S$  pour tout  $l \leq k < k_0$ .

Comme  $A_{k_0-1} \in S$ , il existe  $(c_i, d_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{D}$  et  $p_0 \in \mathbb{N}$  tels que  $A_{k_0-1} = \alpha^{-p_0+2} \sum_{i=1}^{p_0} (c_i - d_i)\alpha^i$ . La suite  $(c_i, d_i)$  est choisie telle que  $(c_i, d_i)_{0 \leq i \leq p_0} \in \mathcal{T}$ . Posons  $B_k = \alpha^{-k+2} \sum_{i=1}^k (c_i - d_i)\alpha^i$ . D'où  $A_{k_0-1} = b_{p_0}$ . Soit  $(x_i, y_i)_{i \geq 1}$  la suite

définie par

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (c_i, d_i) & \text{pour } l \leq i \leq p_0, \\ (a_{i+k_0-p_0-1}, b_{i+k_0-p_0-1}) & \text{pour } i > p_0. \end{cases}$$

Nous avons

$$C_k = \begin{cases} \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k (x_i - y_i) \alpha^i = B_k & \text{pour } l \leq k \leq p_0, \\ A_{k+k_0-p_0-1} & \text{pour } k > p_0. \end{cases}$$

Comme  $C_k$  sont bornés indépendamment de  $k$ , nous avons  $(x_i, y_i)_{i \geq l} \in \mathcal{D}$ . Comme  $(x_i, y_i)_{i \geq l} \in \mathcal{T}$ , nous avons  $C_{p_0+1} \in S$ . D'où  $A_{k_0} \in S$ . Absurde. ■

**Remerciements.** Je tiens à remercier João Evangelista Brito da Silva pour m'avoir aidé de mettre en place les figures.

### Références

- [A00] S. Akiyama, *Cubic Pisot units with finite beta expansions*, dans : Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis, F. Halter-Koch and R. F. Tichy (eds.), de Gruyter, 2000, 11–26.
- [AI1] P. Arnoux and S. Ito, *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, Bul. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 8 (2001), 181–207.
- [AR91] P. Arnoux et G. Rauzy, *Représentation géométrique de suites de complexité  $2n + 1$* , Bull. Soc. Math. France 119 (1991), 101–117.
- [BP93] A. Benedek and R. Panzone, *The set of Gaussian fractions*, Proc. Second “Dr. Antonio A. R. Monteiro” Congress on Math. (Bahia Blanca, 1993), Univ. Nac. del Sur, Bahia Blanca, 1993, 11–40.
- [CS0] V. Canterini and A. Siegel, *Geometric representation of substitutions of Pisot type*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 5121–5144.
- [D82] F. M. Dekking, *Recurrent sets*, Adv. Math. 44 (1982), 78–104.
- [F90] K. Falconer, *Fractal Geometry*, Wiley, Chichester, 1990.
- [G82] W. J. Gilbert, *Complex numbers with three radix expansions*, Canad. J. Math. 34 (1982), 1335–1348.
- [HM04] P. Hubert and A. Messaoudi, *Best simultaneous diophantine approximations of Pisot numbers and Rauzy fractals*, preprint, 2004.
- [IK91] S. Ito and M. Kimura, *On the Rauzy fractal*, Japan J. Indust. Appl. Math. 8 (1991), 461–486.
- [L86] O. Letho, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer, 1986.
- [M98] A. Messaoudi, *Propriétés arithmétiques et dynamiques du fractal de Rauzy*, J. Théor. Nombres Bordeaux 10 (1998), 135–162.
- [M00] —, *Frontière du fractal de Rauzy et système de numération complexe*, Acta Arith. 95 (2000), 195–224.
- [M2] —, *Combinatorial and geometrical properties of a class of fractals*, Bul. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 2005, à paraître.
- [Pa60] W. Parry, *On the  $\beta$ -expansions of real numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 11 (1960), 401–416.
- [P99] B. Praggastis, *Numeration systems and Markov partitions from self-similar tilings*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 3315–3349.

- [P2] N. Pytheas Fogg, *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, V. Berthé *et al.* (eds.), Lecture Notes in Math. 1794, Springer, Berlin, 2002.
- [Q87] M. Queffélec, *Substitution Dynamical Systems—Spectral Analysis*, Lecture Notes in Math. 1294, Springer, Berlin, 1987.
- [R82] G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France 110 (1982), 147–178.
- [S93] V. Sirvent, *Relationships between the dynamical systems associated to the Rauzy substitutions*, Theoret. Comput. Sci. 164 (1996), 41–57.
- [T90] W. P. Thurston, *Groups, tilings, and finite state automata*, AMS Colloquium lectures, 1990.

Departamento de Matemática  
Unesp-Universidade Estadual Paulista  
Rua Cristovão Colombo, 2265  
Jardim Nazareth  
15054-000, São José do Rio Preto, SP, Brasil  
E-mail: messaoud@ibilce.unesp.br

*Reçu le 22.3.2005  
et révisé le 6.9.2005*

(4964)