dr Jolanta Socała
Uniwersytet Śląski
Instytut Matematyki
E-mail: jsocala@ux2.math.us.edu.pl

Zastosowanie funkcji dolnej w badaniu asymptotycznej stacjonarności operatorów dodatnich w przestrzeniach Banacha ze stożkiem

Ważnym zagadnieniem w zastosowaniach matematyki jest badanie asymptotycznych zachowań operatorów dodatnich oraz ich półgrup. Jedną z metod badania takich zachowań jest metoda funkcji dolnej.

Załóżmy, że mamy daną przestrzeń Banacha V ze stożkiem S. Dla $f, g \in V$ będziemy pisać $f \geq g$, jeśli $f - g \in S$. Załóżmy teraz, że mamy zadany operator $P : V \to V$ liniowy i dodatni (tzn. $Pf \geq 0$ dla $f \geq 0$). Mówimy, że operator P jest wykładniczo stacjonarny, jeśli istnieją $\lambda > 0$, $f_0 \in S$, $f_0 \neq 0$ oraz funkcjonał liniowy ciągły $L : V \to R$ takie, że

$$Pf_0 = \lambda f_0 \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda^{-n} P^n f - f_0 Lf\| = 0 \text{ dla } f \in V. \tag{2}$$

Przy pewnych dodatkowych założeniach o stożku S, których z braku miejsca nie będziemy wypisywać, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Liniowy dodatni operator P jest wykładniczo stacjonarny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór D, który jest gęstym podzbiorem S, oraz $h \in S$ takie, że $\|P^n f\| \neq 0$ dla $f \in D \cup \{h\}$, $n \in N$, oraz spełnione są następujące trzy warunki:*

(I) *Dla każdego $f \in D$ istnieje ciąg $\{r_n\}$ ($r_n \in V$, $n \in N$) taki, że $\lim_{n\to\infty} \|r_n\| = 0$.*

(II) *$P^n f/\|P^n f\| \geq h - r_n$ dla $n \in N$, $\limsup_{n\to\infty} \|P^n f\|/\|P^n h\| < \infty$ dla $f \in S$.*

(III) *Ciąg $\{P^n h/\|P^n h\|\}$ ma podciąg zbieżny.*

Ponieważ nie zakładamy istnienia w przestrzeni V $\max(0, f)$ dla dowolnego $f \in V$, więc powyższe wyniki teoretyczne można stosować do badania asymptotycznych zachowań operatorów nie tylko w przestrzeniach funkcji ograniczonych, ciągłych i całkowalnych, ale również różniczkowalnych.