

Paweł Hitczenko  
 Department of Mathematics  
 Drexel University, Philadelphia, PA 19104, USA

## Ogony perpetuit losowych

Przez perpetuitę losową (perpetuitę) rozumie się zmienną losową  $R$  będącą granicą (według rozkładów) ciągu zmiennych losowych  $(R_n)$  spełniających równanie

$$R_n = Q_n + M_n R_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

gdzie  $(Q_n, M_n)$  jest ciągiem niezależnych, identycznie rozłożonych kopii  $(Q, M)$ ,  $R_0$  jest dowolne, a  $(Q_n, R_n)$  są niezależne od  $R_{n-1}$ . W związku z tym, o ile tylko ciąg  $(R_n)$  zbiega,  $R$  może być przedstawiona w postaci

$$R \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \prod_{j=1}^{i-1} M_j.$$

Warunki gwarantujące zbieżność są znane i pochodzą od Kestena (*Acta Math.*, 1973). Rozpoczął on też systematyczne badania nad zachowaniem się ogonów  $R$ .

Dla uproszczenia skupimy się na sytuacji, gdy  $Q$  i  $M$  są nieujemne. Kesten udowodnił, że jeśli  $P(M > 1) > 0$ , a  $r$  jest zdefiniowane przez  $EM^r = 1$  i zachodzi  $EM^r \ln^+ M < \infty$  oraz  $EQ^r < \infty$ , to

$$P(R \geq x) \sim cx^{-r} \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty.$$

Goldie i Grübel (*Adv. Appl. Probab.*, 1996; dalsze badania: Hitczenko i Wesółowski, *Ann. Appl. Probab.*, 2009) rozważali uzupełniający przypadek  $0 \leq M \leq 1$ . Udowodnili między innymi, że ogony są nie cięższe niż wykładnicze oraz, że gdy  $Q \equiv q$ , a  $0 < c < 1$ , to dla  $x > q$

$$P(R > x) \geq \exp\left(\frac{\ln(1-c)}{\ln(1-cq/x)} \ln p_{cq/x}\right) \geq \exp\left(-\frac{\ln(1-c)}{cq} x \ln(p_{cq/x})\right),$$

gdzie dla  $0 < \delta < 1$ ,  $p_\delta = P(1 - \delta \leq M \leq 1)$ .

W komunikacie zaprezentujemy bardzo podobne ograniczenie z góry. Mianowicie: jeśli  $0 \leq Q \leq q$ ,  $0 \leq M \leq 1$ , to dla odpowiednio dużych  $x$

$$P(R > x) \leq \exp\left(\frac{1}{4q} x \ln p_{2q/x}\right).$$

W szczególności, jeśli  $Q \equiv q$ , to biorąc  $c = 1/2$  dostajemy

$$\exp\left(\frac{2 \ln 2}{q} x \ln p_{q/2x}\right) \leq P(R > x) \leq \exp\left(\frac{1}{4q} x \ln p_{2q/x}\right).$$