

Rozmaitości, 19.08.2026

16.1. [David Vreken] W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkty P, Q leżą odpowiednio na odcinkach CA, CB . Punkt M jest środkiem AB . Trójkąt PQM jest równoboczny. Udowodnij, że

$$|PAM| + |QBM| = 3|CPQ| + |PMQ|.$$

16.2. [folklor] Udowodnij, że istnieje dokładnie jeden ciąg $K_1, K_2, K_3, \dots$, (nazywany ciągiem Kolakowskiego) spełniający następujące warunki: $K_1 = 1$, wszystkie jego wyrazy należą do zbioru $\{1, 2\}$ oraz K_n jest długością n -tego odcinka złożonego z kolejnych równych wyrazów. Udowodnij, że jeśli rozważymy ciąg $\tilde{K}_n$ spełniający te same warunki oprócz $\tilde{K}_1 = 2$, to $\tilde{K}_n = K_{n+1}$. Ponadto udowodnij, że nie jest prawdą, że ciąg K_n jest okresowy od pewnego miejsca.

16.3. [Singapur] Niech $a = 2026$ oraz

$$\left(a + \sqrt{a^2 + 9}\right) \left(b + \sqrt{b^2 + 1}\right) = 3.$$

Znajdź $|b|$.

16.4. [David Vreken] Trójkąt równoboczny jest opisany na okręgu o promieniu 1. Oblicz sumę czwartych potęg odległości wierzchołków tego trójkąta od punktu na tym okręgu (w szczególności udowodnij, że jest stała).

16.5. [UK] Niech $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź liczbę rozwiązań równania $x^2 - \lfloor x^2 \rfloor = (x - \lfloor x \rfloor)^2$ w przedziale $[1; N]$.

16.6. [folklor] Udowodnij, że dla każdego punktu na torusie istnieje przechodząca przez niego płaszczyzna, nierównoległa i nieprostopadła do osi symetrii, którą przekrój tego torusa zawiera okrąg.

16.7. [folklor] Na ile maksymalnie obszarów n cięciw może podzielić koło?

16.8. [folklor] Trójkąt ABC jest równoboczny. Każda z czwórek punktów: A, C_1, C_2, B ; B, A_1, A_2, C ; C, B_1, B_2, A leży na jednej prostej w podanej kolejności. Czworokąty $A_2B_1B_3A_3$, $B_2C_1C_3B_3$, $C_2A_1A_3C_3$ są przystającymi kwadratami, a trójkąt $A_3B_3C_3$ jest równoboczny i leży wewnątrz ABC . Oblicz iloraz $\frac{|AB|}{|A_2B_1|}$.