

Twierdzenie Cevy, 23.09.2026

17.-1. Udowodnij, że dla każdych punktów $X \neq Y$ istnieje bijekcja między przedziałem $[0,1]$ a odcinkiem XY zadana przez $p \mapsto (1-p)X + pY$. Ponadto, punkt $Z := (1-p)X + pY$ spełnia $\frac{XZ}{ZY} = \frac{p}{1-p}$ oraz jest środkiem masy układu złożonego z punktów X, Y o masach $1-p, p$.

17.0. [tytułowe twierdzenie] W trójkącie ABC , niech A', B', C' leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB . Oznaczmy $p = \frac{BA'}{BC}, q = \frac{CB'}{CA}, r = \frac{AC'}{AB}$. Udowodnij, że AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{p}{1-p} \cdot \frac{q}{1-q} \cdot \frac{r}{1-r} = 1.$$

17.1. Znajdź zależność między trójką p, q, r z poprzedniego zadania a takim układem (u, v, w) , że wspomniany punkt przecięcia jest jednocześnie środkiem masy układu punktów materialnych A, B, C o masach u, v, w .

17.2. Przypuśćmy, że przy założeniach zadania 0 odcinki AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie M . Jakie jest, w zależności od p, q, r oraz pola trójkąta ABC , pole trójkąta $B'AM$?

17.3. Przypuśćmy, że przy założeniach zadania 0 odcinki AA', BB', CC' *nie* przecinają się w jednym punkcie. Jakie jest, w zależności od p, q, r oraz pola ABC , pole trójkąta wyznaczonego przez te odcinki?

17.4. Przypuśćmy, że przy założeniach zadania 0 odcinki AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie. Niech A'', B'', C'' będą środkami boków BC, CA, AB . Prosta k_A jest równoległa do AA' i przechodzi przez A'' . Analogicznie definiujemy proste k_B, k_C . Udowodnij, że proste k_A, k_B, k_C przecinają się w jednym punkcie.

17.5. Wszystkie 3 pary przeciwległych boków pewnego sześciokąta są równoległe. Udowodnij, że proste łączące środki przeciwległych boków przecinają się w jednym punkcie.

17.6. Na przyprostokątnych BC i CA trójkąta prostokątnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty $BEFC$ oraz $CGHA$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB . Wykaż, że proste AE, BH oraz CD przecinają się w jednym punkcie

Offtopic:

17.7. Niech $a_1, \dots, a_n, \dots$ będzie ciągiem zadany rekurencją

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 - a_n^2}} \text{ dla } n \geq 1.$$

Znajdź $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$.