

O nie - znowu geometria, 30.09.2026

18.-1. Przypomnij sobie wzory na $\sin 3\alpha, \cos 3\alpha$.

18.0. Przypomnij sobie, że dla $a \geq b$ obraz okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu 1 w przekształceniu $(x, y) \mapsto (ax, by)$ to elipsa o środku $(0, 0)$, półosiach a, b i ogniskach $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$. Ponadto, jest ona zbiorem tych punktów, których suma odległości od ognisk jest równa $2a$.

18.1. [AMC] Okrąg Ω o środku r jest styczny zewnętrznie do 12 okręgów $\omega_1, \dots, \omega_{12}$ o promieniach równych 1. Ponadto styczne zewnętrznie są: ω_1 do ω_2 , ω_2 do ω_3 , ... ω_{12} do ω_1 . Znajdź takie liczby całkowite a, b, c , że $r = \sqrt{a} + \sqrt{b} + c$.

18.2. [folklor] Wersja easy: Opisz zbiór punktów, które są środkami odcinków długości 1, których końce leżą na osiach układu współrzędnych.

Wersja hard: Opisz zbiór punktów, będący sumą mnogościową odcinków długości 1, których końce leżą na osiach układu współrzędnych.

18.3. [Graham Holmes] Opisz zbiór punktów, które są środkami elips o półosiach 1, 2, stycznych do obu osi układu współrzędnych.

18.4. [David Vreken] Dziewięciokąt $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ jest foremny. Udowodnij, że

$$|A_0A_8|^3 + |A_3A_5|^3 + |A_1A_7|^3 = |A_2A_6|^3.$$