

Kółko inauguracyjne na przybliżony dzień π , 11.03.2026

0.1. Udowodnij, że wysokość h w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a, b opuszczona na przeciwprostokątną spełnia $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$.

0.2. Udowodnij, że dla dowolnych punktów A, B na płaszczyźnie i stałej k , zbiór punktów takich, że $\frac{1}{|AP|^2} + \frac{1}{|BP|^2} = k$ można otrzymać jako przekrój pewnego torusa pewną płaszczyzną równoległą do jego osi obrotu.

0.3. Udowodnij, że wysokość H w opuszczona z wierzchołka D czworoboku $ABCD$ w którym kąty ADB, BDC, CDA są proste, spełnia $\frac{1}{|AD|^2} + \frac{1}{|BD|^2} + \frac{1}{|CD|^2} = \frac{1}{H^2}$.

0.4. Dany jest okrąg ω o środku S przechodzący przez punkt T . Odcinek TP jest średnicą ω . Punkty $A_1, \dots, A_n$ leżą na ω i są wierzchołkami n -kąta foremnego. Dla każdego j , prosta A_jP przecina $\omega' := \mathcal{O}(P, |PT|)$ w punktach B_{2j-1}, B_{2j} . Udowodnij, że punkty $B_1, B_2, \dots, B_{2n}$ są wierzchołkami $2n$ -kąta foremnego.

0.5. Niech ω będzie okręgiem o obwodzie n , punkty $A_1, \dots, A_n$ wierzchołkami n -kąta foremnego wpisanego w ω . Łuk α ma długość $n^{3/4}$ i jego środkiem jest T . Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{A_k \notin \alpha} |A_k T|^{-2} = 0$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{A_k \in \alpha} \left| |A_k T|^{-2} - |\widehat{A_k T}|^{-2} \right| = 0.$$

0.6. Dla $b \in \mathbb{N}$, oblicz $\sum_{n=b}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

0.7. Dla $b \in \mathbb{N}$, oblicz $\sum_{n=b}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

0.8. Dla $k, b \in \mathbb{N}$, oblicz $\sum_{n=b}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}$.

0.9. Dla $k \in \mathbb{N}$, niech $S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}$ oraz $\tilde{S}_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}$. Udowodnij, że $S_k = \tilde{S}_k + kS_{k+1}$.

0.10. Dla $k \in \mathbb{N}$ oraz $|x| < 1$, co jesteś w stanie powiedzieć o sumie¹ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}$?

¹To zadanie jest trudne. Może się przydać wiedza, że $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.