

Poniżej podzbiór właściwy zadań, którymi będziemy się zajmować w środę.

1.1. Udowodnij, że jeśli liczby naturalne dodatnie x, y, z spełniają $x^2 + y^2 = z^2$, to $12|xy$.

1.2. Udowodnij, że ułamek $\frac{12n+1}{30n+2}$ jest nieskracalny dla każdej liczby naturalnej n .

1.3. Znajdź ostatnią cyfrę liczby 7^{7^7} .

1.4. Ciąg liczb naturalnych dodatnich $a_1, a_2, a_3, \dots$ spełnia $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$ dla każdego n . Udowodnij, że jeśli $n > 10$, to liczba $a_n - 22$ jest złożona. Udowodnij, że jeśli ponadto $a_1 = a_2 = 1$, to żaden z wyrazów tego ciągu nie jest podzielny przez 4.

1.5. Niech α będzie kątem ostrym takim, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Udowodnij, że miara kąta α w stopniach nie jest liczbą wymierną.

1.6. Dane są takie liczby naturalne $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 1951$, że dla każdej pary $1 \leq i < j \leq n$ zachodzi $\operatorname{NWW}(a_i, a_j) > 1951$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

1.7. (Lemat LTE) Niech p będzie liczbą pierwszą, x, y będą liczbami całkowitymi niepodzielnymi przez p . Jeśli $p \geq 3$, to zakładamy ponadto, że $p|x - y$, a jeśli $p = 2$, to $p^2|x - y$. Przez $v_p(z)$ oznaczamy największą liczbę całkowitą (z zerem włącznie) taką, że $p^{v_p(z)}|z$. Udowodnij, że

$$v_p(x^k - y^k) = v_p(x - y) + v_p(k).$$

1.8. Udowodnij, że jeśli liczby naturalne dodatnie k, m, n spełniają $m \leq n$ oraz $m|n^k$, to $m^{m^m}|n^{n^n}$.

1.9. Dane są takie liczby rzeczywiste $x \neq y$, że dla każdego n naturalnego, $x^n - y^n$ jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że x, y są całkowite.

1.10. Niech $n \geq 3$. Udowodnij, że n da się przedstawić jako sumę dwóch lub więcej kolejnych liczb naturalnych¹ wtedy i tylko wtedy, gdy n nie jest potęgą 2 o wykładniku naturalnym.

Offtopic:

1.11. Niech Γ_1 oraz Γ_2 będą łukami wykresów funkcji odpowiednio $y = x^2$ oraz $y = \sqrt{x}$ dla $x \in [0, 1]$. Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, punkty A, B leżą na Γ_1 , a punkty C, D leżą na Γ_2 . Udowodnij, że prosta AB jest nachylona do osi pod kątem 45° .

1.12. Niech $ABCD$ będzie czworościanem (niekoniecznie foremnym). Oznaczmy kąt dwuścienny między ABD i BCD przez β , kąt dwuścienny między BCD i CAD przez γ , kąt dwuścienny między CAD i ABD przez α . Pola ścian BCD, CAD, ABD, ABC oznaczmy odpowiednio przez a, b, c, d . Udowodnij, że prawdziwa jest przestrzenna wersja twierdzenia cosinusów:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos \gamma - 2bc \cos \alpha - 2ca \cos \beta.$$

¹Ta literówka jest zbyt zabawna, żeby ją poprawiać.

Zadania pochodzą z serii książek A. Neugebauera *Matematyka Olimpijska*, książki *Mathematical Circles* autorstwa D. Fomina, S. Genkina i I. Itenberg, oraz folkloru.