

Więcej teorii liczb, 25.03.2026

2.1. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna dodatnia n , którą da się otrzymać jako

$$95a^2 + 80ab + 20b^2$$

dla pewnych liczb całkowitych a, b ?

2.2. Udowodnij, że nie istnieje taka liczba naturalna n , że suma cyfr liczby n^2 jest równa 2000.

2.3. Niech $s(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n . Oblicz $s(s(s(4444^{4444})))$.

2.4. Niech n będzie liczbą naturalną, a $\bar{n}$ liczbą powstałą przez zapisanie cyfr n w odwrotnej kolejności. Udowodnij, że liczba $n\bar{n}$ jest podzielna przez 99.

2.5. Udowodnij następującą uogólnioną cechę podzielności przez 37: jeśli $c_0, c_1, c_2, \dots$ jest ciągiem kolejnych cyfr liczby n zaczynającym się od cyfry jedności, to

$$n \equiv (c_0 - c_2 + c_3 - c_5 + c_6 - c_8 + \dots) + 10(c_1 - c_2 + c_4 - c_5 + c_7 - c_8 + \dots) \pmod{37}.$$

2.67. Niech $k \geq 7$. Wszystkimi dzielnikami liczby n są $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$. Udowodnij, że

$$n \neq d_6^2 + d_7^2.$$

2.8. Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ takie, że dla każdych a, b zachodzi $f(a) + b|a^2 + f(a)f(b)$.

2.9. Niech p będzie liczbą pierwszą. Ile jest p -elementowych podzbiorów zbioru $\{0, 1, \dots, 2p-1\}$, których suma elementów jest podzielna przez p ?

2.10. Niech $\varphi(n)$ oznacza¹ liczbę liczb całkowitych ze zbioru $\{1, \dots, n-1\}$ względnie pierwszych z n . Udowodnij, że jeśli a, b są względnie pierwsze i $n|ab$, to

$$a^{\varphi(n)} + b^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

2.11. Udowodnij, że dla liczb naturalnych $a, n > 2$ zachodzi $n|\varphi(a^n - 1)$.

2.12. Niech $d(k)$ oznacza liczbę dzielników k . Udowodnij, że dla każdego n ,

$$d(1) + d(3) + \dots + d(2n-1) \leq d(2) + d(4) + \dots + d(2n).$$

2.13. Niech $r_1, \dots, r_k$ oraz $a_1, \dots, a_k$ będą liczbami naturalnymi dodatnimi takimi, że zbiory $A_j = \{a_j + nr_j : n \in \mathbb{N}_0\}$ dla $j = 1, \dots, k$ są rozłączne oraz do ich sumy należą wszystkie liczby naturalne oprócz co najwyżej skończenie wielu. Udowodnij, że wówczas

$$\frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_k} = 1.$$

2.14.* Dla jakich liczb wymiernych q , kąt α taki, że $\tan \alpha = q$, jest wymierną wielokrotnością π ?

2.15.* Niech $x_1, \dots, x_n$ będą liczbami całkowitymi. Udowodnij, że liczba

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - x_j}{i - j}$$

jest całkowita.

¹Keyword: twierdzenie Eulera.

Zadania pochodzą z serii książek A. Neugebauera *Matematyka Olimpijska*, książki *Mathematical Circles* autorstwa D. Fomina, S. Genkina i I. Itenberga, forum artofproblemsolving.com oraz folkloru.