

Prof. dr hab. Jacek Dziubański
e-mail: jdziuban@math.uni.wroc.pl

Wrocław, 10 września 2025.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Marcina Gryszówki
”The quantitative Fatou Property
 ε -Approximability and Carleson Measures”

Rozprawa doktorska mgr. Marcina Gryszówki powstała pod opieką dr. hab. Tomasza Adamowicza. Napisana została w języku angielskim i liczy łącznie 115 stron. Sama rozprawa podzielona jest na 5 rozdziałów, z których pierwszy stanowi bardzo dobrze napisany wstęp. Wprowadza on czytelnika w treść rozprawy, przybliżając pojęcia zawarte w tytule (ilościowa własność Fatou i ε -aproksymowalność), by potem przedstawić, w formie trzech podrozdziałów, tezy uzyskane w rozprawie wraz z motywacją zawierającą omówienie wyników uzyskanych przez innych autorów. Rozdział drugi gromadzi preliminaria, niezbędne definicje i znane własności obiektów. Zawiera on rysunki ilustrujące geometryczne własności zdefiniowanych obszarów. Ułatwia to znacznie zrozumienie podanych pojęć. Pozostałe trzy rozdziały zawierają dowody wyników doktoratu. Powstały one na podstawie jednej samodzielnej publikacji kandydata [G] (jest to rozdział 4 dysertacji) i dwóch wspólnych prac: Adamowicz-González-Gryszówka [AGG] (rozdział 3 rozprawy) i Adamowicz-Gryszówka [AdGr] (rozdział 5 doktoratu). Cytowana literatura zawiera 93 pozycje.

W celu oddania motywacji i tła badań zawartych w dysertacji warto posłużyć się twierdzeniami Fatou dla górnej półprzestrzeni (patrz Stein [St1] rozdział VII).

Twierdzenie A. ([St1; Corollary, strona 200]) *Jeśli $u(x, y)$ jest funkcją harmoniczną w $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$, taką że dla pewnego $1 \leq p \leq \infty$ zachodzi*

$$\sup_{y>0} \|u(\cdot, y)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

to u jest całką Poissona pewnej funkcji $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, o ile $p > 1$, w a przypadku $p = 1$, funkcja u jest całką Poissona miary skończonej.

Ponadto dla $1 < p \leq \infty$, istnieje granica niestyczna

$$\lim_{(x,y) \rightarrow x_0, (x,y) \in \Gamma(x_0)} u(x, y)$$

1

dla prawie każdego punktu $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Symbol

$$\Gamma_\alpha(x_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : |x - x_0| < \alpha y\}$$

oznacza stożek o wierzchołku w x_0 i rozpiętości $\alpha > 0$.

Niestyczna zbieżność prawie wszędzie przy brzegu funkcji harmonicznej $u(x, y)$ zdefiniowanej na górnej półprzestrzeni $\mathbb{R}_+^{n+1}$ jest scharakteryzowana poprzez funkcję kwadratową Łuzina $S(u)$ (area function) następującym twierdzeniem.

Twierdzenie B (Stein [St1] Theorem 4 strona 206). *Niech $u(x, y)$ będzie funkcją harmoniczną w $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Wówczas, za wyjątkiem zbioru punktów o mierze zero, następujące warunki są równoważne*

- (a) u ma niestyczną granicę w $x_0 \in \mathbb{R}^n$;
 - (b) $S(u)(x_0)^2 = \int_{(x,y) \in \Gamma_\alpha^h(x_0)} |\nabla u(x, y)|^2 y^{1-n} dy dx < \infty$,
- gdzie $\Gamma_\alpha^h(x_0) = \{(x, y) \in \Gamma_\alpha(x_0), y < h\}$.

Z kolei funkcje harmoniczne na górnej półpłaszczyźnie $\mathbb{R}_+^{n+1}$, będące całkami Poissona funkcji z BMO , charakteryzuje następujące twierdzenie udowodnione w cyklu dwóch prac: Fefferman-Stein [FS] i E.B. Fabes, R.L. Johnson i U. Neri, *Spaces of harmonic functions representable by Poisson integrals of functions in BMO and $\mathcal{L}_{p,\lambda}$* , Indiana Univ. Math. J. 25.2 (1976).

Twierdzenie C. *Niech $u(x, y)$ będzie funkcją harmoniczną w $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

- (a) u jest całką Poissona funkcji z $BMO(\mathbb{R}^n)$;
- (b) $t|\nabla u(x, y)|^2 dx dt$ jest miarą Carlesona na $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

Przypomnijmy, że nieujemna miara μ na obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest miarą Carlesona, gdy dla każdego $x \in \partial\Omega$ miara $\mu(B(x, r))$ jest oszacowana przez miarę powierzchniową $\partial\Omega \cap B(x, Cr)$.

Warto jeszcze przedstawić jeden wynik, wiążący funkcje harmoniczne i miary Carlesona.

Twierdzenie D (Garnet [G]). *Niech σ będzie dodatnią miarą na $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ i niech $\alpha > 0$. Wówczas σ jest miarą Carlesona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała A_α , że*

$$\sigma(\{|u(z)| > \lambda\}) \leq A_\alpha |\{t : N_\alpha u(t) > \lambda\}|, \quad \lambda > 0,$$

dla każdej funkcji harmonicznej u na H . Tutaj $N_\alpha u$ oznacza niestyczną funkcję maksymalną.

Rozprawa doktorska mgr. Marcina Gryszówki utrzymana jest w podobnym duchu i dotyczy badań własności pewnych klas funkcji na obszarach lipschitzowskich w $\mathbb{R}^{n+1}$, obszarach w rozmaitościach Riemanna lub obszarach w grupie Heisneberga. Autor nie ogranicza się w swoich zainteresowaniach do funkcji

harmonicznych, a część wyników dotyczy szerszej klasy. Warunki na geometrie obszarów (dziedziny osiągalne niestycznie (NTA), dziedziny dopuszczalne dla zagadnienia Dirichleta (ADP)) są precyzyjnie podane i wyjaśnione. Autora interesują w szczególności: własność ε -aproksymowalności funkcji i ilościowa własność Fatou funkcji $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Mówimy, że $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność ε -aproksymowalności, gdy istnieje funkcja gładka $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, że $\|u - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ i $|\nabla \varphi|$ wyznacza miarę Carlesona.

Do zdefiniowania ilościowej własności Fatou potrzebna jest funkcja "naliczająca" (counting function) $N(r, \varepsilon, \beta)(\omega)$, $\omega \in \partial\Omega$. Określa ona długość maksymalnego β -lakunarnego ciągu $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Gamma_\alpha^r(\omega)$ o własności $|u(x_j) - u(x_{j+1})| \geq \varepsilon$.

Przejdę teraz do omówienia wyników rozprawy. Z konieczności ograniczę się na wybranych głównych tezach, pomijając (niestety) wiele interesujących rezultatów pomocniczych uzyskanych w rozprawie.

W rozdziale 3 dysertacji, będącym pracą wspólną [AGG], badane są funkcje na obszarach $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y > \phi(x)\}$, gdzie $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją spełniającą warunek Lipschitza. Oto jedno z głównych twierdzeń tej sekcji.

Twierdzenie 1.3.1. *Jeśli funkcja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek*

$$(\#) \quad |u(x)\Delta u(x)| \leq \theta |\nabla u(x)|^2, \quad x \in \Omega$$

ze stałą $0 < \theta < 1$, to dla każdego $\varepsilon > 0$, funkcja u jest ε -aproksymowalna.

Warto zwrócić uwagę, że klasa funkcji spełniających (#) jest szeroka i zawiera funkcje harmoniczne. Dowód tego twierdzenia jest złożony, a konstrukcja funkcji φ , stanowiącej ε -aproksymację, oparta jest o obszary powstałe poprzez czasy zatrzymania pewnej procedury. Istotną częścią dowodu są, interesujące same w sobie, oszacowania na całki z kwadratów lokalnej funkcji kwadratowej (area function) $A_{\alpha,0,\ell(Q)}(u)$, dla funkcji u spełniających (#), zawarte w propozycji 3.2.6.

Kolejny ważny wynik (wniosek 1.3.2), udowodniony w rozdziale trzecim doktoratu i stosujący w dowodzie ε -aproksymowalność, przedstawia ilościową własność Fatou dla ograniczonych funkcji u na Ω , spełniających (#). Wyraża się ona, przy dowolnym $\varepsilon > 0$, nierównością:

$$\sup_{0 < r < r_0} \frac{1}{r^n} \int_{\partial\Omega \cap B(\omega, r)} N(r, \varepsilon, \beta)(z) d\sigma(z) < \infty,$$

gdzie $N(r, \varepsilon, \beta)(z)$ jest funkcją naliczającą. Oczywiście powyższy wynik pociąga niestyczną zbieżność funkcji u dla prawie wszystkich punktów brzegu $\partial\Omega$ obszaru Ω .

W rozdziale czwartym, bazującym na samodzielnej pracy kandydata [Gr], opublikowanej w Journal of Geometric Analysis, badana jest własność ε -aproksymowalności i ilościowa własność Fatou dla ograniczonych funkcji harmonicznym względem operatora Laplace'a-Beltrami'ego na ograniczonych obszarach Lipschitza zawartych w rozmaitościach Riemanna. Dowody głównych wyników

tego rozdziału poprzedzone są bardzo dobrze napisanymi preliminariami, w których autor wprowadza oznaczenia oraz definiuje, względnie przypomina niezbędne dla zrozumienia treści pojęcia dotyczące rozmaitości riemannowskich.

Właściwe badania ε -aproxymatywności funkcji harmonicznej u na ograniczonym obszarze Lipschitza Ω zawartych w rozmaitościach Riemanna M poprzedzone są rozważeniem szczególnego przypadku, mianowicie dwuwymiarowej sfery $\mathbb{S}^2$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (Proposition 4.2.1). Elegancki dowód, podany w doktoracie, wykorzystuje rzut stereograficzny $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i twierdzenie Dahlberga [D1] do uzyskania ε -aproxymacji funkcji $u \circ f^{-1}$ funkcją $\tilde{\phi}$ na $f(\Omega)$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$. Fakty, że obszar $f(\Omega)$ jest lipschitzowski i $|\nabla \varphi|$ jest miarą Carelsona, na Ω , gdzie $\varphi = \tilde{\phi} \circ f$, wymagają rachunków przeprowadzonych w rozprawie.

Dowód istnienia ε -aproxymowalności funkcji harmonicznej u na obszarze Lipschitza $\Omega \subset M$ podzielony jest na trzy etapy. W pierwszym konstruuje się pokrycie Ω zbiorami dyfeomorficznymi z podzbiorami $\mathbb{R}^n$. W drugim stosuje się wyniki prac [HMM1] i [BH] do uzyskania ε -aproxymowalności na każdym ze zbiorów pokrycia. W trzecim etapie autor składa te rozwiązania do uzyskania właściwej aproxymacji.

W dalszej części rozdziału czwartego mgr Gryszówka, stosuje uzyskaną wcześniej ε -aproxymowalność do otrzymania następującego twierdzenia wyrażającego ilościową własność Fatou.

Twierdzenie 1.4.1 (4.4.8). *Niech M będzie zupełną rozmaitością Riemanna wymiaru n , Ω będzie obszarem Lipschitza w M , zaś $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ograniczoną funkcją harmoniczną. Wówczas dla każdego punktu $p \in \partial\Omega$ zachodzi nierówność:*

$$\sup_{0 < r < r_{inj}} r^{1-n} \int_{\partial\Omega \cap B(p,r)} N(r, \varepsilon, \theta)(q) d\sigma(q) \leq C(\varepsilon, \theta, \Omega).$$

Aby uzyskać ten wynik, kandydat pokonuje szereg technicznych trudności, związanych z własnościami analityczno-geometrycznymi rozważanych obiektów, starannie je dowodząc.

Ciekawe wyniki zostały uzyskane w rozdziale piątym doktoratu. Są one oparte o wspólną z promotorem publikację [AdGr], przyjętą do Mathematische Nachrichten. Dotyczą one badań funkcji harmonicznych względem podlaplasjanu

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{j=1}^n (X_j^2 + Y_j^2)$$

na grupie Heisneberga $\mathbb{H} = \mathbb{H}^n \simeq \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (x, y, t)$, gdzie

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}$$

są lewostronnie niezmienniczymi polami wektorowymi na $\mathbb{H}$. Operator $\Delta_{\mathbb{H}}$ nie jest eliptyczny, jest natomiast hipoelityczny i spełnia maksymalne oszacowania podeliptyczne. Warunki na obszary Ω , na których badane są funkcje $\Delta_{\mathbb{H}}$ -harmoniczne, podane są względem metryki Korányi’ego-Reimanna, jednorodnej względem dylatacji $\delta_\rho(x, y, t) = (\rho x, \rho y, \rho^2 t)$. Odległość ta jest porównywalna z odległością Carnota-Carathéodory’ego wyznaczoną względem pól wektorowych $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$.

Pierwszy główny wynik tej części dysertacji (Theorem 1.5.1) jest odpowiednikiem twierdzenia D i orzeka, że przy pewnym założeniu na ograniczony obszar $\Omega \subset \mathbb{H}^1$, dodatnia miara μ na Ω jest miarą Carlesona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mu(\{x \in \Omega : |u(x)| > \lambda\}) \leq C\sigma(\{\omega \in \partial\Omega : N_\alpha u(x) > \lambda\})$$

dla każdej funkcji $\Delta_{\mathbb{H}}$ -harmonicznej u , gdzie σ jest miarą powierzchniową zbioru $\partial\Omega$ (2-wymiarową miarą Hausdorffa).

Następny ważny rezultat doktoratu (Theorem 1.5.2) charakteryzuje miary Carlesona na jednostkowej kuli w metryce Korányi’ego-Reimanna poprzez odwzorowania 1-quasikonforemne.

Kolejne dwa twierdzenia rozdziału piątego dotyczą funkcji $u(x)$, $x \in \Omega$, będących całkami węglem miar $\Delta_{\mathbb{H}}$ -harmonicznych ω^x pewnych funkcji f określonych na brzegu $\partial\Omega$:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} f(y) d\omega^x(y).$$

Pierwsze z nich (Theorem 1.5.3) jest odpowiednikiem twierdzenia Jerisona i Keniga na przestrzeniach euklidesowych i stwierdza, że dla niestycznie osiągalnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{H}$ (NTA domain), norma L^2 funkcji kwadratowej

$$S_\alpha u(x)^2 = \int_{\Gamma_\alpha} |\nabla_H u(y)|^2 d(y, \partial\Omega)^{-2n} dy$$

jest kontrolowana przez normę L^2 funkcji f na brzegu, gdzie $\nabla_H u$ oznacza gradient horyzontalny (złożony jedynie z pochodnych X_j i Y_j , $j = 1, \dots, n$ (bez T)). Drugie twierdzenie (Theorem 1.5.4) podaje oszacowania typu Carlesona na funkcję $|\nabla_H u(x)|^2$ przemnożoną przez funkcję Greena, w przypadku, gdy f należy do $BMO(\partial\Omega)$. W dalszej części rozdziału piątego dowodzone jest twierdzenie Fatou o istnieniu niestycznej granicy funkcji $\Delta_{\mathbb{H}}$ -harmonicznej u , spełniającej warunek $\int_\Omega |\nabla_H u|^p < \infty$, dla pewnego $1 < p \leq 2n + 1$. Rozdział piąty zamyka dodatek, w którym wyprowadzone zostały oszacowania dolne na funkcję Greena $G_\Omega(x, y)$

Rozprawa doktorska mgr. Marcina Gryszówki to wyróżniająca się praca matematyczna. Zawiera szereg interesujących i oryginalnych wyników o zachowaniu pewnych klas funkcji na obszarach. Każdy z trzech rozdziałów badawczych osobno sam w sobie spełnia wymagania stawiane ustawą do nadania stopnia doktora. Przypominam, że rozdział poświęcony funkcjom na rozmaitościach Riemanna jest samodzielną pracą kandydata, natomiast bardzo starannie napisana opinia

promotora wykazuje znaczący udział mgr. Marcina Gryszówki powstanie pozostałych dwóch rozdziałów. Opinia podkreśla także samodzielność kandydata w uzyskaniu wielu wyników tych rozdziałów.

Praca doktorska mgr. Marcina Gryszówki łączy takie działy matematyki jak: cząstkowe równania różniczkowe, geometryczna teoria miary, teoria operatorów, rzeczywista analiza harmoniczna. Tematyka jest żywa i cieszy się zainteresowaniem wielu czołowych ośrodków matematycznych na świecie, a badania są dobrze umotywowane wynikami uznanych specjalistów. Nie sposób tutaj wymienić wszystkich z nich, ale warto wspomnieć w tym momencie choćby o Azzamie, Borzu, Garnettcie, Hofmannie, Kenigu, Kochu, Martellu, Mayborodzie, Morrisie, Mourgoglou, Pipher, Tolsie. W rozprawie kandydat pokonuje wiele technicznych trudności. Umiejętnie operuje, często w złożonych dowodach, jednocześnie metodami geometrycznymi, analitycznymi i teorio-miarowymi. Czytając rozprawę czytelnik szybko przekonuje się, że autor posiada bardzo szeroką i głęboką wiedzę w tematyce pooprowadzanych badań, wykorzystując także najnowsze wyniki, w celu udowodnienia nowych rezultatów. Świadczy to o dużym potencjale matematycznym kandydata. Podoba mi się, jako recenzentowi i czytelnikowi, struktura pracy. Bardzo dobrze napisany wstęp, o czym już wspominałem, wprowadza czytelnika do tego co, go czeka. Dalej, wyjaśnienie pojęć, definicji i oznaczeń dla każdego rozdziału (które są w odpowiednich momentach przypominane), wraz z prezentacją potrzebnych twierdzeń, z dokładnie podanymi referencjami, są bardzo wygodne.

Autor nie uniknął pewnych lapsusów. Wymienię kilka z nich. Sałe w dowodzie "Claim" (strony 40–44 w wersji złożonego doktoratu) są dobrane do wymiaru 1; dla wymiaru n , powinno się wprowadzić inne stałe, co już zostało zrobione. Dalej, pierwsza nierówność w (5.9), mianowicie $\mu(B(x_0, r) \cap \Omega) \lesssim \mu(B(x_0, \frac{1}{2c}r) \cap \Omega)$, przy $c > 1/2$, nie musi być prawdziwa (obcięcie miary Carlesona do zbioru jest miarą Carlesona). Następnie w szacowaniach (5.15) brakuje dodatkowych założeń na wzajemne położenie punktów z i ω (por. Lemma 2.2 pracy [AG2]). Nie bardzo rozumiem ostatnie zdanie w dowodzie twierdzenia 1.5.1. Miary harmoniczne ω^y aproksymują δ_z , gdy y zbiega niestycznie do $z \in \partial\Omega$. Te uwagi nie mają wpływu na wysoką ocenę rozprawy, zarówno pod względem jakości i liczby otrzymanych wyników matematycznych.

Konkluzja. Stwierdzam, że praca doktorska mgr. Marcina Gryszówki spełnia wymagania Ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce" w tym także artykuł 187 Ustawy. Spełnia również, i to z nadmiarem, wymagania zwyczajowe. Wnioskuje o dopuszczenie mgr. Marcina Gryszówki do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

Prof. dr hab. Jacek Dziubański