

Streszczenie pracy doktorskiej

Marcin Gryszówka

Czerwiec 2025

Streszczenie

Ta rozprawa dotyczy studiów nad Ilościową Własnością Fatou (IWF) oraz ε -aproksymowalnością, jak również pojęciami takimi jak niestyczna funkcja maksymalna, funkcja area, czy miary Carlesona. Teraz krótko opiszemy IWF i ε -aproksymowalność. Niech Ω będzie dziedziną w interesującej nas przestrzeni, a $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją. Własność ε -aproksymowalności mówi, że istnieje dostatecznie regularna funkcja, która jest odległa od u o nie więcej niż ε w normie L^∞ oraz norma jej gradientu zadaje miarę Carlesona. Zazwyczaj IWF wynika z ε -aproksymowalności. IWF mówi, że funkcja licząca oscylacje u jest w $L^1_{loc}(\partial\Omega)$. Ta własność jest silniejsza niż twierdzenie Fatou mówiące, że funkcja harmoniczna ma granice niestyczne w prawie każdym punkcie brzegu Ω . Rozprawa skupia się na rozszerzeniu wyników znanych dla funkcji harmoniczych w przestrzeniach euklidesowych. Przeprowadzone badania zawierają wyniki dotyczące funkcji z klasy szerszej niż tylko harmoniczne w przestrzeniach euklidesowych oraz dotyczące funkcji harmoniczych w przestrzeniach nieeuklidesowych. Precyzyjniej, w rozmaitościach riemannowskich i grupach Heisenberga. Rozprawa jest oparta na trzech artykułach [AGG], [Gr], [AdGr].

Wpierw, w rozdziale 3 opartym na [AGG], zajmujemy się przypadkiem funkcji niekoniecznie harmoniczych w przestrzeniach euklidesowych. Pokazujemy, że dla dziedzin, które są nadpoziomicami funkcji lipszycowskich, szczególna klasa funkcji spełnia IWF. Ta klasa zawiera funkcje harmoniczne, ale jest szersza, gdyż nieujemne funkcje subharmoniczne również są jej elementami. Najpierw pokazujemy ε -aproksymowalność, a potem jak wynika z niej IWF.

W rozdziale 4 opartym na [Gr] zajmujemy się przypadkiem funkcji harmoniczych na rozmaitościach riemannowskich. Pracujemy z dziedzinami lipszycowskimi. Dowodzimy ε -aproksymowalność funkcji harmoniczych, ogólniej A -harmoniczych. Następnie pokazujemy IWF.

W ostatnim rozdziale 5 opartym na [AdGr] pracujemy w grupach Heisenberga z dziedzinami osiągalnymi niestycznie (NTA) oraz dziedzinami dopuszczalnymi dla zagadnienia Dirichleta (ADP). Dowodzimy kilka twierdzeń dotyczących miar Carlesona, niestycznej funkcji maksymalnej i funkcji area. Mówimy, że miara μ zdefiniowana na Ω jest miarą Carlesona, jeśli miara przecięcia kuli z Ω , tj. $\mu(\Omega \cap B(x, r))$ dla $x \in \partial\Omega$, jest porównywalna z miarą kuli brzegowej, tj. $\sigma(\partial\Omega \cap B(x, r))$, gdzie σ oznacza miarę powierzchniową. Niestyczna

funkcja maksymalna funkcji u jest supremum wartości bezwzględnej u po stożku o wierzchołku na brzegu Ω . Funkcja area funkcji u w punkcie $x \in \partial\Omega$ jest całką po stożku o wierzchołku w x z normy gradientu u w kwadracie pomnożonej przez odległość do brzegu podniesioną do odpowiedniej potęgi. Wpierw, dowodzimy charakteryzację miar Carlesona w pierwszej grupie Heisenberga $\mathbb{H}^1$ dla dostatecznie regularnych dziedzin, używając niestycznej funkcji maksymalnej. Następnie, dowodzimy charakteryzację miar Carlesona dla kul. Potem pokazujemy, że dla funkcji harmonicznej u na dziedzinie Ω , która jest NTA, z wartością brzegową f , norma L^2 funkcji area dla funkcji u szacuje się przez normę L^2 funkcji f . Dowodzimy również oszacowanie typu Carlesona mówiące, że kwadrat normy gradientu funkcji harmonicznej pomnożony przez funkcję Greena definiuje miarę Carlesona. Na koniec, dowodzimy mocniejszą wersję twierdzenia Fatou. Zmiana polega na tym, że pokazujemy, że niestyczna granica nie istnieje na zbiorze o pojemności zero, a nie tylko o mierze zero.

Słowa kluczowe: Ilościowa Własność Fatou, ε -aproxymowalność, niestyczna funkcja maksymalna, funkcja area, miara Carlesona.

AMS Subject Classification 2024: 58J05, 35J05, 35R01, 35R03, 31B05, 31C05.

Literatura

- [AGG] T. Adamowicz, M. J. González and M. Gryszówka, *ε -Approximability and Quantitative Fatou Property on Lipschitz-graph domains for a class of non-harmonic functions*, arXiv:2412.13072.
- [AdGr] T. Adamowicz and M. Gryszówka, *Carleson measures on domains in Heisenberg groups*, to appear in *Mathematische Nachrichten*.
- [Gr] M. Gryszówka, *ε -Approximability and Quantitative Fatou Theorem on Riemannian manifolds*, *J. Geom Anal* 35, 138 (2025).