

Autoreferat do wniosku habilitacyjnego

1 Imię i nazwisko

dr Mateusz Wasilewski

Zakład Analizy Funkcjonalnej

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa

e-mail: mwasilewski@impan.pl

WWW: <https://sites.google.com/view/mateusz-wasilewski>

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- DOKTOR NAUK MATEMATYCZNYCH: rozprawa doktorska *On q -deformed von Neumann algebras*, napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Adama Skalskiego, obroniona z wyróżnieniem w Instytucie Matematycznym PAN, czerwiec 2018.
- MAGISTER MATEMATYKI: praca *Amalgamacje przestrzeni operatorowych*, napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Piotra Sołtana, obroniona na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, lipiec 2014.
- LICENCJAT Z MATEMATYKI: praca *Wokół hipotezy Littlewooda*, napisana pod kierunkiem dr. hab. Michała Wojciechowskiego, obroniona na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, czerwiec 2012.

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu

- 01/2022–nadal: adiunkt, Zakład Analizy Funkcjonalnej, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa
- 10/2019–12/2021: staż podoktorski w ramach indywidualnego projektu finansowanego przez FWO (fundacja badawcza we Flandrii), KU Leuven, Belgia, mentor: Stefaan Vaes
- 09/2018–09/2019: staż podoktorski, KU Leuven, Belgia, mentor: Stefaan Vaes
- 10/2017–08/2018: asystent, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy

4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego

Grafy kwantowe i ich symetrie

4.2 Cykl artykułów naukowych

- [H1] M. Brannan, A. Chirvasitu, K. Eifler, S. Harris, V. Paulsen, X. Su, and M. Wasilewski, *Bigalois extensions and the graph isomorphism game*, Comm. Math. Phys. **375** (2020), no. 3, 1777–1809;
- [H2] A. Chirvasitu and M. Wasilewski, *Random quantum graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **375** (2022), no. 5, 3061–3087;
- [H3] M. Brannan, M. Hamidi, L. Ismert, B. Nelson, and M. Wasilewski, *Quantum edge correspondences and quantum Cuntz-Krieger algebras*, J. Lond. Math. Soc. (2) **107** (2023), no. 3, 886–913;
- [H4] M. Wasilewski, *On quantum Cayley graphs*, Doc. Math. **29** (2024), no. 6, 1281–1317.

Mój udział w pracach współautorskich jest oceniony na załączonych oświadczeniach.

Omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników

4.3 Wstęp

Grafy kwantowe to naturalny odpowiednik grafów w teorii informacji kwantowej. Głównym celem osiągnięcia habilitacyjnego było rozwinięcie teorii tych obiektów, żeby była ona zrozumiała i interesująca dla matematyków z różnych dziedzin, takich jak grupy kwantowe, C^* -algebry czy nieprzemienność probabilistyka.

Początków teorii grafów kwantowych można się dopatrywać w pracach [DSW13] oraz [Wea12] sprzed ponad dziesięciu lat. W tej pierwszej autorzy wprowadzili macierzowy odpowiednik **grafu zmieszania** (ang. *confusability graph*) dla kanałów kwantowych. Okazało się, że obiekty, jakie można w ten sposób otrzymać są bardzo dobrze znane w teorii algebr operatorów – są to **systemy operatorowe**. W pracy [Wea12] autor wprowadził niezależnie tę samą definicję, jednak w znacznie większej ogólności, bo dla algebr von Neumanna. Motywacja jednak była w tym przypadku inna: chodziło o rozwinięcie teorii relacji kwantowych, gdzie graf zwrotny i nieskierowany interpretujemy jako zwrotną i symetryczną relację na zbiorze wierzchołków. W pracy [KW12] było to potrzebne do zdefiniowania nieprzemiennego odpowiednika przestrzeni metrycznej: dla przestrzeni metrycznej (X, d) i dowolnej liczby

$t \geq 0$ można zdefiniować relację $\mathcal{R}_t$ taką, że $x\mathcal{R}_ty \iff d(x,y) \leq t$ i rodzina tych relacji zawiera pełną informację na temat metryki d . Warto wspomnieć, że podobne obiekty były już rozważane w pracy [EKS98], jednak bez wyraźnych powiązań z teorią grafów.

Powstało sporo prac rozwijających to podejście do grafów kwantowych, na przykład [Sta16], [KM19], [Wea21], [BTW22], [BTW21], [CDS21] i [CM23]. Co ciekawe, zwykłe grafy również można interpretować jako systemy operatorowe specjalnego typu i kwantowe metody również prowadzą do interesujących wyników, zob. [OP15] i [OP16]. Jednak do pełni rozkwitu teorii grafów kwantowych brakowało bardzo ważnego narzędzia.

Obiektem nierozzerwalnie związanym z grafem jest jego **macierz sąsiedztwa**. O ile w przypadku klasycznym jest ona tożsama z grafem w sposób oczywisty, w przypadku nieprzemiennym nie jest nawet jasne, jakiego typu obiektem powinna być macierz sąsiedztwa. Problem ten został rozwiązany w pracy [MRV18] (zobacz też [MRV19]). Tradycyjnie macierz sąsiedztwa to odwzorowanie liniowe na przestrzeni $\mathbb{C}^n$, gdzie n jest liczbą wierzchołków grafu, a przestrzeń $\mathbb{C}^n$ możemy interpretować jako zbiór funkcji na zbiorze wierzchołków o wartościach zespolonych. W przypadku nieprzemiennym rolę $\mathbb{C}^n$ odgrywa skończenie wymiarowa C^* -algebra B , czyli suma prosta algebr macierzowych, a kwantową macierzą sąsiedztwa będzie odwzorowanie liniowe $A : B \rightarrow B$. Niestety C^* -algebra B nie posiada kanonicznej bazy, więc trudność stanowi interpretacja warunku, że elementy macierzą sąsiedztwa są równe 0 lub 1. Autorzy znaleźli naturalny odpowiednik tego warunku, poczynawszy od wymyślenia jego bardziej abstrakcyjnego opisu. Mianowicie $A \in M_n$ jest macierzą sąsiedztwa wtedy i tylko wtedy, gdy $A \bullet A = A$, gdzie przez $\bullet$ rozumiemy **iloczyn Hadamarda** macierzy, czyli iloczyn po współrzędnych. Okazuje się, że iloczyn ten można opisać korzystając z dwóch faktów: $\mathbb{C}^n$ jest algebrą oraz posiada iloczyn skalarny. C^* -algebra B również jest algebrą i można ją wyposażyć w iloczyn skalarny Hilberta-Schmidta, więc również dla odwzorowań liniowych na B można wprowadzić analogon iloczynu Hadamarda, względem którego kwantowa macierz sąsiedztwa będzie idempotentem.

Ta definicja pozwala na uogólnienie ważnych definicji z teorii grafów, takich jak stopnie itp. Pozwala również mówić o kwantowych symetriach, co nie jest takie proste z punktu widzenia systemów operatorowych¹. Od tego momentu można też zaobserwować więcej prac na temat grafów kwantowych, które nie nawiązują bezpośrednio do teorii informacji kwantowej.

O tych jednak nie warto zapominać, bo nadal pozostają bardzo ważne. Szczególnie bliski jest związek z teorią gier nielokalnych, która może podpowiadać, w jaki sposób uogólniać klasyczne parametry grafów. Pomaga ona zwłaszcza w tych przypadkach, które można definiować za pomocą homomorfizmów, na przykład liczbę chromatyczną: zob. [BH TT23], [BH TT24], [BGH22], [Gan23] i [BK23]. W pracy [Gan23] zostały wykorzystane metody spektralnej teorii grafów do oszacowania liczby chromatycznej, również w pracy [Mat24] pojawiają się spektralne charakteryzacje różnych własności, takich jak spójność czy dwudzielność.

Dla małych rozmiarów (na M_2) grafy kwantowe zostały sklasyfikowane w [Gro22] i [Mat22].

Praca [H1]. Jednym z kluczowych wyników jest wyjaśnienie związku między istnieniem kwantowego izomorfizmu grafów a relacją między ich kwantowymi grupami automorfizmów.

¹Opis taki powstał dość niedawno, zob. [Daw24].

Mianowicie kwantowy izomorfizm (pojęcie wprowadzone w pracy [AMR⁺19]) zadaje monoidalną równoważność o jednej dodatkowej własności; to oznacza, że kwantowe grupy automorfizmów mają taką samą teorię reprezentacji, ale nie muszą być izomorficzne. Taki sam wynik zachodzi dla grafów kwantowych. Z punktu widzenia teorii informacji kwantowej istnieje wiele wersji kwantowego izomorfizmu i ze znanych wyników na temat monoidalnej równoważności wywiedliśmy, że bardzo słaba wersja automatycznie implikuje znacznie mocniejszą.

Co więcej, samo pojęcie grafu kwantowego zostało rozszerzone w tej pracy. Jak wspomnieliśmy, do jego zdefiniowania potrzebna jest struktura algebry oraz iloczyn skalarny. Struktura algebry jest zadana z góry, ale iloczyn skalarny można modyfikować. Iloczyn skalarny można zdefiniować za pomocą funkcjonału na algebrze (tak jak iloczyn skalarny na przestrzeni L^2 jest definiowany przy użyciu miary) i iloczyn Hilberta-Schmidta pochodzi od śladu, natomiast w tej pracy dopuszczamy ogólne 1-formy, które są odpowiednikami miary liczącej; na $\mathbb{C}^n$ istnieje tylko jedna 1-forma.

Praca [H2]. W tej pracy wprowadziliśmy odpowiedniki modeli losowych Erdősa-Rényiego. Jeden z nich polega na losowaniu systemu operatorowego o ustalonym wymiarze, co odpowiada grafowi o ustalonej liczbie krawędzi. Drugi model, w którym ustalone jest prawdopodobieństwo występowania krawędzi między dowolną parą wierzchołków, może być uzyskany za pomocą tego pierwszego, ponieważ obcięcie tego rozkładu prawdopodobieństwa do grafów o ustalonej liczbie krawędzi M jest rozkładem jednostajnym. W przypadku kwantowym nie istnieje inny opis tego modelu, ponieważ nie istnieje pojęcie wierzchołka, jedynie cały zbiór wierzchołków ma pewien sens. Dodatkowo odpowiedniość między systemami operatorowymi a kwantowymi macierzami sąsiedztwa została opisana w bardzo konkretny sposób (w przypadku śladowym). Głównym wynikiem tej pracy jest analogon klasycznego twierdzenia: graf losowy prawie na pewno nie posiada nietrywialnych symetrii. Jednym z istotnych narzędzi w dowodzie było pojęcie macierzy stopni², które zostało wprowadzone w tym artykule.

Praca [H3]. W artykule [BEVW22] autorzy wprowadzili definicję algebry Cuntza-Kriegera grafu kwantowego, jako uniwersalną konstrukcję opisaną za pomocą generatorów i relacji; wersja dla klasycznych grafów (zob. [CK80]) to jedna z lepiej zbadanych klas C^* -algebr. Pimsner w [Pim97] stowarzyszył z dowolną C^* -korespondencją C^* -algebrę i pokazał, w jaki sposób można otrzymać algebry Cuntza-Kriegera. W pracy [H3] zdefiniowaliśmy dla dowolnego grafu kwantowego **korespondencję krawędziową** (ang. *edge correspondence*) i zdefiniowaliśmy nowy odpowiednik algebry Cuntza-Kriegera. Są one zawsze ilorazami C^* -algebr z pracy [BEVW22], ale pozostaje niejasne, czy są izomorficzne. Dodatkowe relacje sprawiają, że w większej liczbie przypadków potrafimy dokładnie zidentyfikować nasze C^* -algebry. Poza tym w pracy dokładnie wyjaśniamy, w jaki sposób korespondencja krawędziowa jest kolejnym równoważnym opisem grafu kwantowego.

Praca [H4]. Pierwszym z głównych wyników tej pracy jest dokładny opis odpowiedniości między różnymi definicjami grafów kwantowych w przypadku nieśladowym (inne podejście zostało zaproponowane w pracy [Daw24]). Ogólne grafy odpowiadają **przestrzeniom ope-**

²Pojęcie stopnia wierzchołka nie istnieje, ponieważ nie mamy wierzchołków, ale macierz stopni, rozumiana kolektywnie, ma sens.

ratorowym i samosprężone przestrzenie operatorowe opisują grafy nieskierowane; istnieje też analogiczne pojęcie symetrii dla kwantowych macierzy sąsiedztwa. Żeby nasza odpowiedź dobrze współgrała z tymi pojęciami symetrii, konieczne było użycie iloczynu skalarowego KMS, który różni się od standardowego w przypadku nieśladowym. Kolejnym istotnym wkładem jest wprowadzenie nieskończonych grafów kwantowych, czyli takich, dla których C^* -algebra B jest nieskończoną sumą prostą algebr macierzowych. Odpowiedniość między różnymi definicjami pozostaje zachowana i można wprowadzić naturalne klasy nieskończonych grafów kwantowych, takie jak grafy kwantowe lokalnie skończone czy o ograniczonym stopniu. Doskonałym przykładem tych ostatnich są zdefiniowane w tej pracy **kwantowe grafy Cayleya** dyskretnej grupy kwantowej. Jeśli grupa kwantowa jest nieskończona, to otrzymujemy nieskończone grafy kwantowe, które wymagają pracy w przypadku nieśladowym, jeśli grupa kwantowa nie jest unimodularna. Wykorzystując teorię kwantowych przestrzeni metrycznych z [KW12] pokazałem, że kwantowy graf Cayleya jako kwantowa przestrzeń metryczna nie zależy od wyboru zbioru generującego, tak jak ma to miejsce w przypadku klasycznym. Jako przykład ilustrujący tę teorię udowodniłem również, że jeśli wzrost kwantowego grafu Cayleya jest podwykładniczy, to dyskretna grupa kwantowa musi być średniowalna.

4.4 Podstawowe pojęcia i notacja

Zbiór $\{1, \dots, n\}$ będziemy oznaczać jako $[n]$. Będziemy oznaczać C^* -algebry jako B , natomiast $B(H)$ to algebra wszystkich operatorów ograniczonych na przestrzeni Hilberta H . Czasem będzie mówić o algebrach von Neumanna, typowo oznaczanych przez M lub N ; są to C^* -algebry domknięte w słabej topologii operatorowej. 1 będzie oznaczać jedynkę w algebrze, natomiast Id będzie odwzorowaniem identycznościowym. Jeśli $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem C^* -algebr, to będziemy oznaczać

$$c_0 - \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in B_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{B_n} = 0\}$$

$$\ell^\infty - \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in B_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{B_n} < \infty\}.$$

Jeśli B będzie nieskończoną sumą prostą jednego z tych dwóch typów, to $c_{00}(B)$ będzie oznaczać algebraiczną sumę prostą, czyli $*$ -algebrę generowaną przez ciągi o skończonym nośniku.

Definicja 4.4.1. Niech B_1 i B_2 będą C^* -algebrami. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ iloczyny tensorowe $M_n \otimes B_1$ oraz $M_n \otimes B_2$ również są C^* -algebrami. Powiemy, że odwzorowanie liniowe $\Phi : B_1 \rightarrow B_2$ jest **dodatnie**, jeśli dla dowolnego $0 \leq x \in B_1$ mamy $\Phi(x) \geq 0$. Φ jest **całkowicie dodatnie**, jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $\Phi_n := \text{Id}_{M_n} \otimes \Phi$ jest dodatnie.

Uwaga 4.4.2. Transpozycja jako odwzorowanie z M_2 do M_2 jest odwzorowaniem dodatnim, które nie jest całkowicie dodatnie.

Przykład 4.4.3. Ważnym przykładem odwzorowania całkowicie dodatniego jest **warunkowa wartość oczekiwana**, czyli całkowicie dodatni rzut $\mathbb{E} : B_2 \rightarrow B_1$, gdzie $B_1 \subset B_2$ jest włożeniem C^* -algebr. Warunkowa wartość automatycznie jest odwzorowaniem B_1 -bimodułów, czyli $\mathbb{E}(xby) = x\mathbb{E}(b)y$, gdy $x, y \in B_1$.

Definicja 4.4.4. Dodatni funkcjonał $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ nazwiemy **stanem**, jeśli ma normę 1. Gdy algebra B posiada jedynekę, jest to równoważne warunkowi $\varphi(1) = 1$. Gdy $B = M_n$, to każdy stan jest postaci $\varphi(x) = \text{Tr}(\rho x)$, gdzie ρ jest dodatnio określoną macierzą o śladzie 1, zwaną **macierzą gęstości**.

Uwaga 4.4.5. Funkcjonały dodatnie są automatycznie całkowicie dodatnie.

Stwierdzenie 4.4.6. Każde odwzorowanie całkowicie dodatnie $\Phi : M_n \rightarrow M_m$ posiada **rozkład Krausa**, czyli istnieje (skończona) rodzina operatorów $V_k : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ taka, że $\Phi(x) = \sum_k V_k x V_k^*$.

Definicja 4.4.7. Niech B będzie C^* -algebrą i niech X będzie prawym B -modułem. X nazywamy modułem prehilbertowskim, jeśli jest wyposażony w półtoraliniowe odwzorowanie $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow A$ takie, że

- (i) $\langle x, yb \rangle = \langle x, y \rangle b$ dla wszystkich $x, y \in X$ i $b \in A$;
- (ii) $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$;
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ i $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Moduł X można wyposażyć w normę $\|x\| := \sqrt{\|\langle x, x \rangle\|_B}$. Powiemy, że X jest modułem Hilbertowskim, jeśli ta norma jest zupełna.

Moduły Hilbertowskie mają przypominać przestrzenie Hilberta, lecz iloczyn skalarny przyjmuje wartości w pewnej C^* -algebrze, co może prowadzić do komplikacji. Jednym z kluczowych pojęć w teorii operatorów jest sprzężenie, które chcemy uogólnić.

Definicja 4.4.8. Niech X i Y będą modułami prehilbertowskimi nad C^* -algebrą B . Powiemy, że operator liniowy $T : X \rightarrow Y$ jest **sprzęgalny**, jeśli istnieje operator $S : Y \rightarrow X$ taki, że $\langle y, Tx \rangle_Y = \langle Sy, x \rangle_X$ dla wszystkich $x \in X$ i $y \in Y$. Zbiór operatorów sprzęgalnych oznaczamy przez $L_B(X, Y)$.

Uwaga 4.4.9. Każdy operator sprzęgalny jest B -liniowy, czyli $T(xb) = T(x)b$ dla wszystkich $x \in X$ i $b \in B$. Wynika to z faktu, że

$$\langle y, T(xb) \rangle = \langle Sy, xb \rangle = \langle Sy, x \rangle b = \langle y, Tx \rangle b = \langle y, (Tx)b \rangle.$$

Zbiór $L_B(X) := L_B(X, X)$ jest C^* -algebrą.

Bardzo istotne dla przestrzeni Hilberta jest również twierdzenie Riesa.

Definicja 4.4.10. Moduł prehilbertowski X nad C^* -algebrą B nazywamy **samodualnym**, jeśli dowolne B -liniowe ciągłe odwzorowanie $T : X \rightarrow B$ jest postaci $Tx = \langle y, x \rangle$ dla pewnego $y \in X$.

Uwaga 4.4.11. Samodualny moduł prehilbertowski X jest automatycznie Hilbertowski oraz każde B -liniowe ciągłe odwzorowanie z X do innego modułu prehilbertowskiego Y jest sprzężalne ([Pas73, Proposition 3.4]).

Będziemy pracować tylko z modułami prehilbertowskimi nad algebrami von Neumanna. W tym wypadku moduły samodualne mają więcej własności: są przestrzeniami sprzężonymi, algebra operatorów sprzęganych jest algebrą von Neumanna oraz posiadają one bazę ortonormalną ([Pas73, Proposition 3.8, Proposition 3.10, Theorem 3.12]), czyli taki podzbiór $(x_i)_{i \in I} \subset X$, że $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} p_i$, gdzie $p_i \in B$ jest rzutem ortogonalnym, oraz szereg $\sum_i x_i \langle x_i, x \rangle$ zbiega do x w odpowiedniej słabej topologii. Sprawdzanie samodualności dla modułów Hilbertowskich nad algebrami von Neumanna sprowadza się do następującego faktu: należy udowodnić, że dany moduł X jest przestrzenią dualną i iloczyn skalarny jest $*$ -słabo ciągły względem każdej ze zmiennych [BLM04, Lemma 8.5.4]. Wszystkie te własności zachodzą dla skończone wymiarowych modułów nad skończonymi C^* -algebrami, co jest wystarczające do opisu skończonych grafów kwantowych.

Oprócz modułów będziemy również potrzebowali C^* -korespondencji, które są bimodułami.

Definicja 4.4.12. Niech X będzie modułem prehilbertowskim nad B_2 . Powiemy, że jest on **C^* -korespondencją** nad B_1 i B_2 , jeśli istnieje $*$ -homomorfizm $\Phi : B_1 \rightarrow L_{B_2}(X)$, który zadaje lewe działanie $b \cdot x := \Phi(b)x$.

Teraz zaprezentujemy konstrukcję korespondencji przy użyciu odwzorowania całkowicie dodatniego.

Przykład 4.4.13. Niech $A : B_1 \rightarrow B_2$ będzie odwzorowaniem całkowicie dodatnim. Definiujemy na $B_1 \otimes B_2$ odwzorowanie półtoraliniowe o wartościach w B_2 $\langle a \otimes b, c \otimes d \rangle := b^* A(a^* c) d$. To odwzorowanie spełnia wszystkie warunki modułu prehilbertowskiego poza faktem, że $\langle x, x \rangle = 0$ może zachodzić dla $x \neq 0$. Musimy więc skonstruować iloraz $B_1 \otimes B_2$ przez podprzestrzeń $\{x \in B_1 \otimes B_2 : \langle x, x \rangle = 0\}$ a następnie uzupełnić, żeby otrzymać moduł Hilbertowski $B_1 \otimes_A B_2$. Co więcej, mamy lewe działanie $x \cdot (a \otimes b) := xa \otimes b$, które definiuje $*$ -homomorfizm $\Phi : B_1 \rightarrow L_{B_2}(B_1 \otimes_A B_2)$; sprzężeniem lewego mnożenia przez x jest lewe mnożenie przez x^* .

W szczególnym przypadku, gdy $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ jest stanem, otrzymujemy słynną **konstrukcję GNS**, czyli przestrzeń Hilberta H (prawy $\mathbb{C}$ -moduł) wyposażoną w reprezentację $\pi : B \rightarrow B(H)$. Co więcej, przestrzeń H można uzyskać jako uzupełnienie (i ewentualnie iloraz) algebry B wyposażonej w iloczyn skalarny

$$\langle b_1, b_2 \rangle := \varphi(b_1^* b_2). \quad (4.1)$$

Z tego powodu czasem oznaczamy H jako $L^2(B, \varphi)$.

Definicja 4.4.14. Niech φ będzie wiernym stanem na algebrze von Neumanna $\mathbf{M}$. Istnieje jednoparametrowa grupa $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ $*$ -automorfizmów $\mathbf{M}$, nazywana **grupą modularną**, która zachowuje stan φ i spełnia warunek KMS $\varphi(xy) = \varphi(y\sigma_{-i}(x))$, jeśli tylko da się zdefiniować $\sigma_{-i}(x)$. Dla $\mathbf{M} = M_n$ i $\varphi(x) := \text{Tr}(\rho x)$ mamy $\sigma_t(x) = \rho^{it} x \rho^{-it}$.

4.4.1 Grafy kwantowe

Rozpocznijmy od zaprezentowania grafów zmieszania (ang. *confusability graphs*) z pracy [DSW13]; zaczniemy od przypadku klasycznego **kanału** $\Phi : X \rightarrow Y$, czyli przyporządkowania każdemu elementowi $x \in X$ rozkładu prawdopodobieństwa na Y (X i Y są zbiorami skończonymi). Definiujemy graf o zbiorze wierzchołków $V := X$ oraz zbiorze krawędzi $E := \{(x_1, x_2) : \text{supp}(\Phi(x_1)) \cap \text{supp}(\Phi(x_2)) \neq \emptyset\}$. Kanał Φ można interpretować jako losową funkcję z X do Y i (x_1, x_2) jest krawędzią w grafie zmieszania, jeśli szansa, że x_1 i x_2 przejdą na ten sam element jest niezerowa. Każdy graf zwrotny³ (ang. *reflexive*) i nieskierowany można uzyskać w ten sposób.

W przypadku nieprzemiennym zaczynamy od **kanału kwantowego** $\Phi : M_n \rightarrow M_m$, czyli odwzorowania całkowicie dodatniego takiego, że $\text{Tr}_m(\Phi(x)) = \text{Tr}_n(x)$. Φ posiada rozkład Krausa $\Phi(x) = \sum_k V_k x V_k^*$, przy czym $\sum_k V_k^* V_k = \mathbb{1}_n$, co jest równoważne zachowywaniu śladu przez Φ . Definiujemy podprzestrzeń $V_\Phi := \text{span}\{V_i^* V_j\} \subset M_n$ i nazywamy ją **kwantowym grafem zmieszania**. Podprzestrzeń ta nie zależy od rozkładu Krausa, a jedynie od odwzorowania Φ , ale nie jest to oczywiste. Co więcej, spełnia warunki $V_\Phi^* = V_\Phi$ oraz $\mathbb{1} \in V_\Phi$, czyli jest **systemem operatorowym**; każdy system operatorowy w M_n jest tej postaci [Dua09, Lemma 2].

Teraz postaramy się wyjaśnić, dlaczego V_Φ może być nazwane kwantowym grafem zmieszania. W przypadku klasycznym dwa wierzchołki $x, y \in X$ są połączone krawędzią, jeśli po przejściu przez kanał da się je pomylić. Kluczowe jest więc pojęcie **rozdzielności**, które klasycznie oznacza jedynie tyle, że dwa elementy są różne, ale kwantowo jest to odrobinę bardziej subtelne. W tym przypadku chodzi o rozdzielność stanów: dwie macierze gęstości ρ_1 i ρ_2 są rozdzielne, jeśli $\text{Tr}(\rho_1 \rho_2) = 0$. Dla stanów **czystych**, czyli takich, dla których macierz gęstości jest postaci $\rho = |v\rangle\langle v|$ dla pewnego wektora długości 1, oznacza to, że wektory te są ortogonalne; najczęściej będziemy takie wektory po prostu nazywali stanami. Sprawdźmy teraz, kiedy dwa rozdzielne stany w_1 i w_2 po przejściu przez kanał kwantowy $\Phi(x) := \sum_k V_k x V_k^*$ pozostają rozdzielne. Musimy więc policzyć

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\Phi(|w_1\rangle\langle w_1|)\Phi(|w_2\rangle\langle w_2|)) &= \sum_{k,l} \text{Tr}(|V_k w_1\rangle\langle V_k w_1, V_l w_2\rangle\langle V_l w_2|) \\ &= \sum_{k,l} \text{Tr}(\langle V_k w_1, V_l w_2\rangle\langle V_l w_2, V_k w_1\rangle) = \sum_{k,l} |\langle V_l^* V_k w_1, w_2\rangle|^2. \end{aligned}$$

To wyrażenie jest równe 0 dokładnie wtedy, gdy operator $|w_1\rangle\langle w_2|$ jest prostopadły do systemu operatorowego V_Φ , co pokazuje, że V_Φ ma związek z rozdzielnością stanów po za-

³Graf zwrotny to taki, w którym każdym wierzchołku jest zaczepiona pętla.

działaniu kanałem kwantowym Φ . Wobec tego możemy sformułować pierwszą definicję grafu kwantowego.

Definicja 4.4.15. Grafem kwantowym na algebrze M_n nazywamy system operatorowy $V \subset M_n$.

Kolejna definicja jest motywowana dualnością Gelfanda, która orzeka, że kategoria zwartych przestrzeni topologicznych oraz przemiennej C^* -algebr z jedynek są dualnie równoważne, gdzie przestrzeni X przyporządkowujemy algebrę funkcji ciągłych $C(X)$. W związku z tym często myśli się o C^* -algebrach jako o nieprzemiennych przestrzeniach topologicznych i wiele klasycznych pojęć zostało uogólnionych tak, że można je zdefiniować dla ogólnych C^* -algebr (na przykład K-teoria).

Spróbujmy tak zrobić z pojęciem relacji na zbiorze X . Klasycznie jest to podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times X$, czyli musimy znaleźć odpowiedniki dwóch pojęć: iloczynu kartezjańskiego oraz podzbiorów. Sytuacja z iloczynem kartezjańskim jest prosta: z klasycznego izomorfizmu⁴ $C(X \times Y) \simeq C(X) \otimes C(Y)$ wnioskujemy, że odpowiednikiem iloczynu kartezjańskiego jest iloczyn tensorowy. Jeśli chodzi o podzbiory, to ograniczmy się do przypadku skończonego, żeby zapomnieć o topologii. Podzbiór można opisać za pomocą funkcji charakterystycznej, czyli funkcji f o zbiorze wartości $\{0, 1\}$. Algebraicznie oznacza to, że $f = f^2$. Chodzi nam więc o idempotenty w C^* -algebrze. Zauważmy jednak, że klasycznie równość $f = f^2$ pociąga za sobą warunek, że f przyjmuje wartości rzeczywiste, czyli $f = \bar{f}$. Wobec tego chodzi nam o idempotenty samosprężone, czyli rzuty ortogonalne. Składając te dwie definicje, dochodzimy do wniosku, iż kwantową relacją na skończenie wymiarowej C^* -algebrze B powinien być rzut ortogonalny $p \in B \otimes B$. W przypadku nieprzemiennym tak naprawdę wygodniej, żeby był to rzut w algebrze $B \otimes B^{\text{op}}$, gdzie B^{op} jest algebrą przeciwną do B , czyli tą samą przestrzenią liniową, ale z odwróconym mnożeniem, zatem $x^{\text{op}} \cdot y^{\text{op}} = (yx)^{\text{op}}$. Odwzorowanie identycznościowe z B do B^{op} będziemy oznaczać przez ι . Załóżmy, że $B \subset B(H)$. Wtedy każdy element $x := \sum_i x_i \otimes y_i^{\text{op}} \in B \otimes B^{\text{op}}$ działa na $B(H)$ jako $x \cdot T := \sum_i x_i T y_i$. Operator zadany przez p będzie idempotentem i jego obraz będzie pewną podprzestrzenią $V \subset B(H)$. Ta podprzestrzeń jest niezmiennicza na lewe i prawe mnożenie przez elementy **komutanta** $B' := \{T \in B(H) : bT = Tb \text{ dla wszystkich } b \in B\}$. To prowadzi do kolejnej definicji.

Definicja 4.4.16 ([Wea12]). Załóżmy, że $B \subset B(H)$ jest algebrą von Neumanna. **Kwantową relacją** na B nazywamy dowolny $*$ -słabo domknięty B' -bimoduł $V \subset B(H)$.

Ta definicja wydaje się dużo bardziej techniczna, ale postaramy się wyjaśnić, dlaczego w szczególnym przypadku $B = M_n$ pokrywa się z tą poprzednią. Po pierwsze, można pokazać, że definicja ta nie zależy od wyboru reprezentacji, zatem dla M_n możemy założyć, że $H = \mathbb{C}^n$ i wtedy $B' = \mathbb{C}1$. Co więcej, warunek $*$ -słabej domkniętości jest automatycznie spełniony, ponieważ przestrzeń jest skończenie wymiarowa. Brakuje nam tylko warunków $V = V^*$ oraz $1 \in V$. One jednak opisują relacje symetryczne i zwrotne, dlatego ogólna definicja nie może

⁴Iloczyn tensorowy jest tu odpowiednim uzupełnieniem algebraicznego iloczynu tensorowego, w przypadku C^* -algebr nazywanym **minimalnym**.

ich zawierać. Sprawdźmy, co się dzieje z symetrią. Powinna ona odpowiadać takiemu rzutowi $p = \sum_i p_i \otimes q_i^{\text{op}}$, że $p = \sum_i q_i \otimes p_i^{\text{op}}$. Z związku z tym mamy

$$p \cdot T^* = \sum_i q_i T^* p_i = \left(\sum_i p_i T q_i \right)^* = (p \cdot T)^*,$$

gdzie wykorzystaliśmy równość $p = \sum_i p_i^* \otimes (q_i^{\text{op}})^* = p$, ponieważ p jest rzutem ortogonalnym. W związku z tym $V = V^*$. Podobnie można znaleźć naturalną interpretację warunku $\mathbb{1} \in V$, który oznacza zwrotność relacji. Co więcej, wiele klasycznych pojęć z teorii relacji można uogólnić, na przykład przechodniość relacji tłumaczy się na warunek, że V jest algebrą.

Ta definicja może być sformułowana dla ogólnych algebr von Neumanna B , podczas gdy naiwne podejście przez rzut $p \in B \otimes B^{\text{op}}$ już nie jest tak przydatne (i nie jest wtedy równoważne). Jak się okaże, w szczególnym przypadku, gdy B jest nieskończoną sumą prostą algebr macierzowych, rzut ten nadal jest istotną częścią teorii.

Ostatnia z definicji będzie a priori zupełnie inna; chodzi tu o uogólnienie macierzy sąsiedztwa. W pracy [MRV18] autorzy wyszli z założenia, że zbiór wierzchołków należy zastąpić skończeniem wymiarową C^* -algebrą B , podobnie jak w poprzedniej definicji, natomiast strukturę grafu powinna zadawać **kwantowa macierz sąsiedztwa**, czyli odwzorowanie liniowe $A : B \rightarrow B$, które spełnia dodatkowy warunek. W przypadku przemennym oznacza on, że mamy do czynienia z macierzą zero-jedynkową. Ten warunek dla zwykłej macierzy sąsiedztwa to $A \bullet A = A$, gdzie $\bullet$ jest iloczynem Hadamarda, czyli $(A \bullet B)_{ij} := A_{ij} B_{ij}$. Problem z uogólnieniem polega na tym, że iloczyn Hadamarda to operacja na macierzach, a nie na odwzorowaniach liniowych, czyli zależy od wyboru bazy. Należy jednak pamiętać, że B jest nie tylko przestrzenią liniową, ale również C^* -algebrą. Co więcej, klasycznie często pomijaną dodatkową strukturą zbioru wierzchołków jest miara licząca, co w przypadku nieprzemennym odpowiada istnieniu pewnego dodatniego funkcjonału τ na B . Jak wybrać τ w sposób kanoniczny? Można rozważyć włożenie $B \subset \text{End}(B)$, gdzie B działa na sobie przez mnożenie z lewej strony. Na $\text{End}(B)$ istnieje kanoniczny ślad, który można obciąć do B . Będzie to funkcjonał śladowy, czyli spełniający $\tau(b_1 b_2) = \tau(b_2 b_1)$. Co więcej, $\tau(\mathbb{1}) = \dim(B)$, co upodabnia go do miary liczącej. Można ten ślad również zdefiniować inaczej: jest to jedyna śladowa 1-forma⁵ na B , czyli dodatni funkcjonał śladowy taki, że $mm^* = \text{Id}$, gdzie $m : B \otimes B \rightarrow B$ jest mnożeniem na algebrze B , natomiast $m^* : B \rightarrow B \otimes B$ jest sprzężeniem hermitowskim względem iloczynów skalarnych zadanych przez τ oraz $\tau \otimes \tau$ (zob. (4.1)). Jeśli napiszemy B jawnie jako sumę prostą macierzy, to jest $B \simeq \bigoplus_{k=1}^N M_{n_k}$, to $\tau = \bigoplus_{k=1}^N n_k \text{Tr}_{n_k}$.

W przypadku klasycznym, czyli $B \simeq \mathbb{C}^n$ mamy $m(e_i \otimes e_j) = \delta_{ij} e_i$ oraz $m^*(e_i) = e_i \otimes e_i$. W związku z tym dla dwóch macierzy $A_1, A_2 \in M_n$ mamy $m(A_1 \otimes A_2) m^*(e_i) = A_1(e_i) A_2(e_i)$, czyli punktowy iloczyn i -tych kolumn A_1 i A_2 , wobec czego $m(A_1 \otimes A_2) m^* = A_1 \bullet A_2$.

Definicja 4.4.17. Niech B będzie skończeniem wymiarową C^* -algebrą i niech τ będzie jej jedyną śladową 1-formą. Niech A_1 i A_2 będą odwzorowaniami liniowymi na B . **Kwantowym iloczynem Hadamarda** odwzorowań A_1 i A_2 nazywamy $m(A_1 \otimes A_2) m^* : B \rightarrow B$, które

⁵1-formy z geometrii różniczkowej nie pojawiają się w tym tekście, więc ta definicja nie powinna być myląca. Jest to szczególny przypadek δ -formy, dla której $mm^* = \delta^2 \text{Id}$.

będziemy oznaczać przez $A_1 \bullet A_2$. Powiemy, że $A : B \rightarrow B$ jest **kwantową macierzą sąsiedztwa**, jeśli $A \bullet A = A$.

Stwierdzenie 4.4.18. *Dla $B \simeq M_n$ mamy $m^*(e_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_k e_{ik} \otimes e_{kj}$. Wobec tego $A : M_n \rightarrow M_n$ jest kwantową macierzą sąsiedztwa wtedy i tylko wtedy, gdy $A(e_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_k A(e_{ik})A(e_{kj})$.*

Dzięki temu stwierdzeniu i jego łatwemu rozszerzeniu na przypadek sumy prostej algebr macierzowych dostajemy konkretny warunek, który muszą spełniać kwantowe macierze sąsiedztwa. W pracy [MRV18] kwantowe macierze sąsiedztwa spełniają dwa dodatkowe warunki⁶:

- $\tau((Ax)y) = \tau(x(Ay))$ dla wszystkich $x, y \in B$;
- $A(x^*) = (A(x))^*$.

Pierwszy warunek oznacza tyle, że graf jest nieskierowany, natomiast drugi jest spełniony automatycznie w klasycznym przypadku; mówimy, że taka kwantowa macierz sąsiedztwa jest **rzeczywista**. W rozdziale 4.5 powiemy więcej o tym założeniu.

Uwaga 4.4.19. Będziemy zakładać, że wszystkie kwantowe macierze sąsiedztwa są rzeczywiste.

W pracy [H1] definicja kwantowej macierzy sąsiedztwa została rozszerzona na przypadek, gdy C^* -algebra B jest wyposażona w nieśladową 1-formę.

Definicja 4.4.20. Powiemy, że para (B, ψ) , gdzie $\psi : B \rightarrow \mathbb{C}$ jest dodatnim funkcjonałem, jest **przestrzenią kwantową**, jeśli ψ jest 1-formą, czyli $mm^* = \text{Id}$. Trójka $\mathcal{G} := (B, \psi, A)$, gdzie $A : B \rightarrow B$ jest odwzorowaniem linowym, jest **grafem kwantowym**, jeśli (B, ψ) jest przestrzenią kwantową, natomiast $A \bullet A = A$ oraz $A(x^*) = (A(x))^*$ dla wszystkich $x \in B$.

Podamy teraz uogólnienie Stwierdzenia 4.4.18 na przypadek nieśladowy.

Stwierdzenie 4.4.21. *Niech funkcjonal dodatni ψ na $B \simeq M_n$ będzie zadany wzorem $\psi(x) := \text{Tr}(\rho x)$, gdzie ρ jest macierzą odwracalną. Wtedy $m^*(e_{ij}\rho^{-1}) = \sum_k e_{ik}\rho^{-1} \otimes e_{kj}\rho^{-1}$. Co więcej, m^* jest odwzorowaniem B -bimodułów, więc $m^*(e_{ij}) = \sum_k e_{ik}\rho^{-1} \otimes e_{kj}$. To oznacza, że ψ jest 1-formą wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Tr}(\rho^{-1}) = 1$. W przypadku $B \simeq \bigoplus_a M_{n_a}$ będzie to warunek $\text{Tr}(\rho_a^{-1}) = 1$ dla każdego indeksu a .*

Uwaga 4.4.22. Przypadek śladowej 1-formy otrzymujemy dla $\rho = n1$.

Teraz zilustrujemy przydatność kwantowej macierzy sąsiedztwa do znajdowania odpowiedników klasycznych pojęć z teorii grafów.

Definicja 4.4.23 ([H2]). Niech $\mathcal{G} := (B, \psi, A)$ będzie grafem kwantowym. **Macierzą stopni** tego grafu kwantowego nazywamy $D := A1 \in B$. Klasycznie jest to diagonalna macierz, która na przekątnej ma stopnie wierzchołków.

Pojęcie to będzie bardzo przydatne przy badaniu symetrii grafów kwantowych.

⁶W tym artykule są one sformułowane trochę inaczej: kwantowe macierze sąsiedztwa są równe swej transpozycji oraz swemu sprzężeniu hermitowskiemu. W naszym przypadku wybraliśmy transpozycję i sprzężenie zespolone.

4.4.2 Grupy kwantowe

Do opisu symetrii grafów kwantowych oraz do konstrukcji kwantowych grafów Cayleya niezbędne będzie wprowadzenie paru pojęć dotyczących grup kwantowych; skupimy się na przypadku zwartym i dyskretnym. Zwarte grupy kwantowe zdefiniował Woronowicz (zob. [Wor87b] oraz [Wor87a]); dobrym źródłem informacji na ich temat jest książka [NT13]. Dyskretne grupy kwantowe, które w niniejszym tekście będą traktowane głównie jako obiekty dualne do zwartych grup kwantowych, zostały dobrze opisane w pracy [VD96]. Przedstawimy teraz podstawowe definicje z tej teorii oraz zaprezentujemy kluczowe przykłady.

Definicja 4.4.24. Zwartą grupą kwantową $\mathbb{G}$ to obiekt opisywany przez parę $(C(\mathbb{G}), \Delta)$. $C(\mathbb{G})$ jest C^* -algebrą z jedyneką, natomiast $\Delta : C(\mathbb{G}) \rightarrow C(\mathbb{G}) \otimes C(\mathbb{G})$, zwana **komnożeniem** jest $*$ -homomorfizmem spełniającym:

- (i) $(\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta = (\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta$;
- (ii) podprzestrzenie $(C(\mathbb{G}) \otimes \mathbb{1})\Delta(C(\mathbb{G})) := \text{span}\{(a \otimes \mathbb{1})\Delta(b) : a, b \in C(\mathbb{G})\}$ oraz $(\mathbb{1} \otimes C(\mathbb{G}))\Delta(C(\mathbb{G}))$ są gęste w $C(\mathbb{G}) \otimes C(\mathbb{G})$.

Uwaga 4.4.25. Celowo używamy określenia, że para $(C(\mathbb{G}), \Delta)$ „opisuje” grupę kwantową $\mathbb{G}$, ponieważ różne C^* -algebry mogą opisywać tę samą grupę kwantową, podobnie jak w przypadku klasycznym można wykorzystać różne przestrzenie funkcyjne, na przykład funkcje ciągłe, algebraiczne czy mierzalne do opisanie tego samego obiektu.

Pierwszy warunek spełniany przez komnożenie to **kołaczość**, naturalny odpowiednik łączności mnożenia. Gdybyśmy pracowali tylko z nim, to opisywalibyśmy zwarte półgrupy kwantowe. Drugi warunek mówi w klasycznym przypadku tyle, że mnożenie spełnia prawo skracania, a zwarta półgrupa ze skracaniem jest zwartą grupą; z tego wynika, że faktycznie jest to uogólnienie klasycznych grup zwartych.

Można udowodnić, że na zwartej grupie kwantowej istnieje jedyny **stan Haara**, czyli stan h na $C(\mathbb{G})$ taki, że $(h \otimes \text{Id})\Delta(a) = h(a)\mathbb{1} = (\text{Id} \otimes h)\Delta(a)$ dla wszystkich $a \in C(\mathbb{G})$. Przestrzeń GNS tego stanu oznaczamy przez $L^2(\mathbb{G})$, natomiast $*$ -słabe domknięcie $C(\mathbb{G})$ wewnątrz $B(L^2(\mathbb{G}))$ oznaczamy przez $L^\infty(\mathbb{G})$. Można również zdefiniować reprezentacje zwartych grup kwantowych.

Definicja 4.4.26. Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią Hilberta oraz niech $\mathbb{G}$ będzie zwartą grupą kwantową. Powiemy, że operator unitarny $U \in B(H) \otimes C(\mathbb{G})$ jest **unitarną reprezentacją** $\mathbb{G}$, jeśli $(\text{Id} \otimes \Delta)U = U_{12}U_{13}$, gdzie U_{12} oznacza, że U działa na pierwszym i drugim czynniku iloczynu tensorowego $B(H) \otimes C(\mathbb{G}) \otimes C(\mathbb{G})$, to jest $U_{12} := U \otimes \mathbb{1}$; podobnie definiujemy U_{13} .

Definicja nieskończenie wymiarowych reprezentacji wymaga drobnej technicznej modyfikacji, ale również nie nastęrcza wielu problemów. Dla zwartych grup kwantowych zachodzi twierdzenie Petera-Weyla, czyli wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje są skończenie wymiarowe oraz każda reprezentacja unitarna rozkłada się na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych. Tak jak w przypadku klasycznym, podalgebra $\mathcal{O}(\mathbb{G}) \subset C(\mathbb{G})$ generowana przez

współczynniki skończenie wymiarowych reprezentacji jest gęsta i większość teorii zwartych grup kwantowych można opisać w terminach tego algebraicznego obiektu.

Jednym z najważniejszych przykładów nieskończenie wymiarowych reprezentacji jest **prawa reprezentacja regularna** opisywana przez **operator unitarny multiplikatywny** $W \in B(L^2(\mathbb{G})) \otimes L^\infty(\mathbb{G})$ ⁷, który spełnia $W(a \otimes \mathbb{1})W^* = \Delta(a)$, jeśli patrzymy na $C(\mathbb{G})$ jako C^* -podalgebrę $B(L^2(\mathbb{G}))$. Tę reprezentację można wykorzystać, żeby skonstruować dualną dyskretną grupę kwantową do $\mathbb{G}$.

Definicja 4.4.27. Niech $\ell^\infty(\Gamma) := \bigoplus_{\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})} M_{n_\alpha}$, gdzie $\text{Irr}(\mathbb{G})$ jest zbiorem klas równoważności nieprzywiedlnych reprezentacji $\mathbb{G}$, natomiast n_α jest wymiarem reprezentacji α . Istnieje dokładnie jeden $*$ -homomorfizm $\Delta_\Gamma : \ell^\infty(\Gamma) \rightarrow \ell^\infty(\Gamma) \bar{\otimes} \ell^\infty(\Gamma)$ taki, że $(\Delta_\Gamma \otimes \text{Id})(W) = W_{23}W_{13}$; można pokazać, że $W \in \ell^\infty(\Gamma) \bar{\otimes} L^\infty(\mathbb{G})$, więc ta równość ma sens. Δ_Γ definiuje komnożenie na $\ell^\infty(\Gamma)$ i w ten sposób para $(\ell^\infty(\Gamma), \Delta_\Gamma)$ definiuje dyskretną grupę kwantową Γ dualną do $\mathbb{G}$.

Przykład 4.4.28. (i) $C(SU_q(2))$ (dla $q \in [-1, 1] \setminus \{0\}$) jest uniwersalną C^* -algebrą generowaną przez elementy α, γ takie, że macierz $\begin{bmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{bmatrix}$ jest unitarna. Komnożenie jest zadane wzorem $\Delta(\alpha) := \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma$ i $\Delta(\gamma) := \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma$. Dla $q = 1$ odzyskujemy klasyczną grupę $SU(2)$.

(ii) Niech $F \in M_n$ będzie odwracalną macierzą. Niech $C(U_F^+)$ będzie uniwersalną C^* -algebrą generowaną przez elementy $(u_{ij})_{i,j \in [n]}$ takie, że macierz $U := (u_{ij})$ jest unitarna oraz $F\bar{U}F^{-1}$ także jest macierzą unitarną, gdzie $\bar{U} := (u_{ij}^*)$. Komnożenie jest zadane wzorem $\Delta(u_{ij}) := \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj}$. Tak powstałą grupę kwantową nazywamy **wolną grupą unitarną**. W przypadku $F = \mathbb{1}$ oznaczamy ją jako U_n^+ .

(iii) Tym razem zakładamy, że macierz $F \in M_n$ spełnia dodatkowo warunek $F\bar{F} = c\mathbb{1}$ dla pewnej liczby $c \in \mathbb{R}$. Niech $C(O_F^+)$ będzie uniwersalną C^* -algebrą generowaną przez elementy $(u_{ij})_{i,j \in [n]}$ takie, że macierz $U := (u_{ij})$ jest unitarna oraz $U = F\bar{U}F^{-1}$. Komnożenie jest zadane wzorem $\Delta(u_{ij}) := \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj}$. Tę grupę kwantową nazywamy **wolną grupą ortogonalną** i dla $F = \mathbb{1}$ oznaczamy ją przez O_n^+ .

(iv) Niech $C(S_n^+) = C^*\{p_{ij} : \text{macierz } P := (p_{ij}) \text{ jest unitarna oraz } p_{ij} = p_{ij}^* = p_{ij}^2\}$. Równoważnie, można powiedzieć, że każda kolumna i każdy wiersz macierzy P składają się z wzajemnie ortogonalnych rzutów sumujących się do identyczności – takie macierze nazywamy **magicznymi macierzami unitarnymi**. Komnożenie jest zadane wzorem $\Delta(p_{ij}) := \sum_k p_{ik} \otimes p_{kj}$. Zwartą grupę kwantową S_n^+ nazywamy **kwantową grupą permutacji**. Z jej użyciem można również zdefiniować kwantową grupę automorfizmu grafu G , dodając warunek $AP = PA$, gdzie A jest macierzą sąsiedztwa tego grafu. Równość ta oznacza, że $\sum_k a_{ik}p_{kj} = \sum_k p_{ik}a_{kj}$ dla dowolnej pary $(i, j) \in [n]^2$.

⁷Iloczyn tensorowy oznaczany jako $\bar{\otimes}$ to naturalny odpowiednik minimalnego iloczynu tensorowego dla algebr von Neumanna.

4.5 Równoważność definicji grafów kwantowych

Omówimy teraz część wyników z prac [H2], [H3] oraz [H4], w których zostały zaprezentowane jawne wzory pozwalające na przechodzenie pomiędzy różnymi definicjami grafów kwantowych, w szczególności w bardziej skomplikowanym przypadku nieśladowym i nieskończonym. Zaczniemy od znanych wcześniej wyników.

Twierdzenie 4.5.1 ([Wea12, Proposition 2.23]). *Niech $B \subset B(H)$ będzie skończenie wymiarową algebrą von Neumanna. Wtedy istnieje bijekcja między kwantowymi relacjami na B a rzutami ortogonalnymi w $B \otimes B^{\text{op}}$, która zachowuje porządek.*

Porządek na kwantowych relacjach jest zadany przez zawieranie, natomiast porządek na rzutach ortogonalnych jest zadany przez zawieranie ich obrazów.

Twierdzenie 4.5.2 ([MRV18, Theorem VII.7]). *Niech B będzie skończenie wymiarową algebrą von Neumanna wyposażoną w śladową 1-formę. Wówczas istnieje bijekcja między rzeczywistymi kwantowymi macierzami sąsiedztwa a rzutami ortogonalnymi w $B \otimes B^{\text{op}}$.*

W przypadku $B \simeq M_n$ ta odpowiedniość jest zadana przez znany z informacji kwantowej **izomorfizm Choi-Jamiołkowskiego**. Z każdym odwzorowaniem liniowym $A : M_n \rightarrow M_n$ można stowarzyszyć **macierz Choi** $\text{Choi}(A) := \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n A(e_{ij}) \otimes (e_{ji})^{\text{op}} \in M_n \otimes M_n^{\text{op}}$. Łatwo sprawdzić, że $\text{Choi}(A_1) \text{Choi}(A_2) = \text{Choi}(A_1 \bullet A_2)$, czyli warunek $A \bullet A = A$ jest równoważny temu, że macierz $\text{Choi}(A)$ jest idempotentem. Macierz $\text{Choi}(A)$ zadaje operator liniowy na M_n zadany przez mnożenie z lewej i prawej strony, który będzie idempotentny; jego obraz będzie pewną relacją kwantową na M_n . Może istnieć wiele idempotentów o tym samym obrazie, więc naturalnym wyborem wydaje się jedyny rzut ortogonalny, czyli idempotent samosprzężony. Łatwo również sprawdzić, że warunek $(\text{Choi}(A))^* = \text{Choi}(A)$ jest równoważny temu, że odwzorowanie A zachowuje $*$, czyli $A(x^*) = (A(x))^*$, co jest dodatkową motywacją dla zakładania, że kwantowe macierze sąsiedztwa są rzeczywiste. Warto też wspomnieć o tym, że idempotent P w C^* -algebrze jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy jest operatorem dodatnim, ponieważ wtedy $P = P^2 = P^*P \geq 0$. Istotą izomorfizmu Choi-Jamiołkowskiego jest fakt, że dodatniość macierzy Choi jest równoważna całkowitej dodatniości odwzorowania, czyli rzeczywiste kwantowe macierze sąsiedztwa są automatycznie całkowicie dodatnie. To oznacza, że posiadają rozkład Krausa, co pozwala na napisanie jawnych wzorów na odpowiedniości między różnymi podejściami do grafów kwantowych.

Twierdzenie 4.5.3 ([H2, Lemma 1.6, Proposition 1.11]). *Niech $V \subset M_n$ będzie d -wymiarową podprzestrzenią i niech $(V_1, \dots, V_d)$ będzie jej bazą ortonormalną względem iloczynu skalarnego Hilberta-Schmidta. Wtedy kwantowa macierz sąsiedztwa jest zadana wzorem $Ax := n \sum_{i=1}^d V_i x V_i^*$, natomiast macierz Choi jest równa $\text{Choi}(A) := \sum_{i,k,l} V_i e_{kl} \otimes (V_i^* e_{lk})^{\text{op}} = \sum_{i,k,l} V_i e_{kl} V_i^* \otimes e_{kl}^{\text{op}}$. Jeśli wystartujemy od kwantowej macierzy sąsiedztwa, to V jest podprzestrzenią rozpiętą przez operatory Krausa (która nie zależy od konkretnego rozkładu Krausa). Jeśli natomiast wystartujemy od rzutu ortogonalnego $P \in M_n \otimes M_n^{\text{op}}$, to kwantową macierz sąsiedztwa możemy odzyskać za pomocą wzoru $Ax := (\text{Id} \otimes \tau)(P \# (1 \otimes x))$, gdzie $\tau = n \text{Tr}$, natomiast $\#$ oznacza naturalne działanie $M_n \otimes M_n^{\text{op}}$ na $M_n \otimes M_n$.*

Dowód. Jeśli zaczniemy od bazy ortonormalnej $(V_1, \dots, V_d)$, to możemy zapisać wzór na rzut ortogonalny na V jako $P_V x = \sum_{i=1}^d V_i \text{Tr}(V_i^* x) = \sum_{i=1}^d V_i \text{Tr}(x V_i^*)$. Łatwo zauważyć, że $\text{Tr}(y) \mathbb{1} = \sum_{k,l} e_{kl} y e_{lk}$, czyli P_V można wyreprezentować jako element $M_n \otimes M_n^{\text{op}}$ w następujący sposób

$$P := \sum_{i,k,l} V_i e_{kl} V_i^* \otimes e_{lk}^{\text{op}} = \sum_{i,k,l} V_i e_{kl} \otimes (V_i^* e_{lk})^{\text{op}}.$$

Z pierwszej z tych postaci i definicji macierzy Choi natychmiast wynika, że $Ax = n \sum_i V_i x V_i^*$. Wzór $Ax := (\text{Id} \otimes \tau)(P \# (\mathbb{1} \otimes x))$ jest dobrze znany i również łatwo go uzasadnić. Warto tu też wspomnieć o tym, że zamiana operatorów V_i na V_i^* (czyli zamiana V na V^*) odpowiada naturalnej symetrii na poziomie P , co widać z drugiej równości.

Jeśli zaczniemy od kwantowej macierzy sąsiedztwa, macierz Choi będzie rzutem i nie-trudno sprawdzić, że obrazem rzutu na M_n będzie powłoka liniowa operatorów Krausa. $\square$

Przypadek ogólnej skończenie wymiarowej C^* -algebry B omówimy w kolejnym podrozdziale, w którym zajmiemy się również przypadkiem nieśladowym.

4.5.1 Grafy kwantowe w przypadku nieśladowym

W Definicji 4.4.20 opisaliśmy już grafy kwantowe w języku kwantowej macierzy sąsiedztwa. Odpowiednikiem macierzy Choi jest tu operator

$$P := (A \otimes \iota) m^*(\mathbb{1}) \in B \otimes B^{\text{op}} \quad (4.2)$$

wprowadzony w pracy [MRV18, Remark 7.3] w przypadku śladowym, natomiast w przypadku nieśladowym w [H3, Definition 2.1]⁸.

Twierdzenie 4.5.4 ([H3, Proposition 2.3], [H4, Lemma 3.6, Proposition 3.7]). *Niech (B, ψ) będzie przestrzenią kwantową. Odwzorowanie liniowe $A : B \rightarrow B$ spełnia $A \bullet A = A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P = P^2$. Co więcej, $A(x^*) = (A(x))^*$ dla każdego $x \in B$ dokładnie wtedy, gdy $(\text{Id} \otimes (\sigma_{\frac{i}{2}}^{\text{op}}))(P)$ jest operatorem samosprzężonym, gdzie σ^{op} jest grupą modularną funkcjonatu ψ^{op} na algebrze B^{op} .*

Co więcej, mamy $A(x) = (\text{Id} \otimes \psi)(P \# (\mathbb{1} \otimes x))$.

W pracy [H4, Lemma 3.3] został podany nowy wzór na $\Psi^{\text{KMS}}(A) := (\text{Id} \otimes \sigma_{\frac{i}{2}}^{\text{op}})(P)$, po którym widać, że jest to operator dodatni, o ile kwantowa macierz sąsiedztwa jest całkowicie dodatnia. Dokładnie rzecz biorąc, w przypadku $B \simeq M_n$ mamy

$$\Psi^{\text{KMS}}(A) = \sum_{i,j=1}^n A(\rho^{-\frac{1}{4}} e_{ij} \rho^{-\frac{1}{4}}) \otimes (\rho^{-\frac{1}{4}} e_{ji} \rho^{-\frac{1}{4}})^{\text{op}}, \quad (4.3)$$

co jest wyrażeniem bardzo podobnym do zwyczajnej macierzy Choi. Ten wzór jest związany z odwzorowaniem $\Psi'_{0,0}$ z pracy [Daw24], które operator rzędu jeden $|a\rangle\langle b|$ (względem iloczynu

⁸W tej pracy stosowana była konwencja, że pracujemy ze stanem, który jest δ -formą.

skalarne GNS) przekształca na $a \otimes (b^*)^{\text{op}}$. Wówczas $\Psi'_{0,0}(A) = P$, natomiast Ψ^{KMS} otrzymuje się przez zastąpienie iloczynu skalarne GNS iloczynem KMS, o którym chciałbym teraz opowiedzieć trochę więcej.

Każdy dodatni funkcjonal φ na algebrze macierzowej M_n jest zadany przez dodatnią macierz ρ w taki sposób, że $\varphi(x) = \text{Tr}(\rho x)$ (zakładamy, że ρ jest macierzą odwracalną, więc funkcjonal jest wierny). Iloczyn skalarne GNS jest zadany wzorem $\langle x, y \rangle := \varphi(x^* y) = \text{Tr}(\rho x^* y) = \text{Tr}((x \rho^{\frac{1}{2}})^* y \rho^{\frac{1}{2}})$, czyli jest to iloczyn skalarne Hilberta-Schmidta macierzy $x \rho^{\frac{1}{2}}$ oraz $y \rho^{\frac{1}{2}}$. Można więc myśleć, że odwzorowanie $x \mapsto x \rho^{\frac{1}{2}}$ jest włożeniem algebry M_n w pewną przestrzeń Hilberta. Nic nie szkodzi na przeszkodzi temu, żeby rozważać inne włożenia, na przykład $x \mapsto \rho^{\frac{1}{2}} x$. **Iloczyn skalarne KMS** dostaniemy dla włożenia $x \mapsto \rho^{\frac{1}{4}} x \rho^{\frac{1}{4}}$.

Definicja 4.5.5. Niech B będzie skończenie wymiarową algebrą von Neumanna wyposażoną w dodatni, wierny funkcjonal φ . Definiujemy iloczyn skalarne KMS na B jako $\langle x, y \rangle_{\text{KMS}} = \varphi(x^* \sigma_{-\frac{i}{2}}(y))$.

Uwaga 4.5.6. Gdy $B \simeq M_n$ i $\varphi(x) = \text{Tr}(\rho x)$, to $\langle x, y \rangle_{\text{KMS}} = \text{Tr}(\rho x^* \rho^{\frac{1}{2}} y \rho^{-\frac{1}{2}})$, co jest równe $\text{Tr}((\rho^{\frac{1}{4}} x \rho^{\frac{1}{4}})^* \rho^{\frac{1}{4}} y \rho^{\frac{1}{4}})$.

Włożenie KMS $x \mapsto \rho^{\frac{1}{4}} x \rho^{\frac{1}{4}}$ zachowuje dodatniość, co sprawia, że iloczyn skalarne KMS posiada własności podobne do iloczynu skalarne Hilbert-Schmita zadanego przez ślad, mianowicie $\langle x, y \rangle_{\text{KMS}} = \langle y^*, x^* \rangle_{\text{KMS}}$. To pociąga za sobą fakt, że sprzężenie hermitowskie odwzorowania zachowującego $*$ również posiada tę własność.

Jedną z przyjemnych konsekwencji stosowania iloczynu skalarne KMS jest fakt, że samosprężoność kwantowej macierzy sąsiedztwa A jest równoważna temu, że operator $\Psi^{\text{KMS}} \in B \otimes B^{\text{op}}$ jest niezmienniczy ze względu na odwzorowanie $\Sigma : B \otimes B^{\text{op}} \rightarrow B \otimes B^{\text{op}}$ zadane wzorem $\Sigma(a \otimes b^{\text{op}}) := b \otimes a^{\text{op}}$ (zob. [H4, Proposition 3.7]). Jest to naturalne założenie, jeśli chcemy mówić o nieskierowanych grafach kwantowych. Można też łatwo sprawdzić, że sprzężenie hermitowskie kwantowej macierzy sąsiedztwa również jest kwantową macierzą sąsiedztwa, co nie jest prawdą dla iloczynu skalarne GNS, bo w tym wypadku sprzężenie może nie zachowywać $*$.

4.5.1.1 Grafy kwantowe jako relacje kwantowe Dotychczas wyjaśniliśmy, w jaki sposób opisać grafy kwantowe za pomocą kwantowej macierzy sąsiedztwa $A : B \rightarrow B$ bądź za pomocą rzutu $P \in B \otimes B^{\text{op}}$. Pozostaje nam opis w terminach kwantowych relacji, czyli B' -bimodulów $V \subset B(H)$, gdy $B \subset B(H)$. Przypomnijmy, że w Twierdzeniu 4.5.3 przechodziśmy od podprzestrzeni do rzutu w $M_n \otimes M_n^{\text{op}}$ wykorzystując bazy ortonormalne. W obecnym, ogólniejszym przypadku wymagałoby to zdefiniowania iloczynu skalarne na $B(H)$. Okazuje się, że z pomocą funkcjonału ψ na B możemy skonstruować iloczyn skalarne na $B(H)$ o wartościach w B' , czyli będziemy mieli strukturę modułu Hilbertowskiego. W skończeniu wymiarowym przypadku moduły Hilbertowskie zachowują się podobnie do przestrzeni Hilberta, na przykład posiadają bazy ortonormalne, co pozwoli nam na stowarzyszenie rzutu $P \in B \otimes B^{\text{op}}$ z B' -bimodulem $V \subset B(H)$.

Wykorzystamy konstrukcję Haagerupa ([Haa79, Theorem 6.13]), która wadze o wartościach operatorowych $\psi : M \rightarrow N$ przyporządkowuje wagę o wartościach operatorowych

$\psi^{-1} : N' \rightarrow M'$. W naszym przypadku $M = B$ oraz $N = \mathbb{C}$, więc $\psi : B \rightarrow \mathbb{C}$ będzie po prostu naszym dodatnim funkcjonałem, który wprowadza strukturę przestrzeni kwantowej na B . Jeśli mamy reprezentację $B \subset B(H)$, to otrzymujemy $\psi^{-1} : B(H) \rightarrow B'$. W przypadku $B \simeq M_n$ dostajemy prosty wzór na ψ^{-1} , ponieważ każda reprezentacja $M_n \subset B(H)$ jest postaci $M_n \subset M_n \otimes B(K)$, gdzie $H \simeq \mathbb{C}^n \otimes K$. Jeśli $\psi(x) := \text{Tr}(\rho x)$, to $\psi^{-1}(x \otimes T) = \text{Tr}(\rho^{-1}x)T$ ([Kos98, Remark 3.3 (iii)]). Gdy (B, ψ) jest przestrzenią kwantową, czyli $mm^* = \mathbb{1}$, to ψ^{-1} jest warunkową wartością oczekiwaną. Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla ogólnej skończonej wymiarowej C^* -algebry B i w ten sposób dla dowolnej reprezentacji $B \subset B(H)$ otrzymujemy warunkową wartość oczekiwaną $\psi^{-1} : B(H) \rightarrow B'$. To pozwala zdefiniować iloczyn skalarny o wartościach w B' za pomocą wzoru $\langle S, T \rangle := \psi^{-1}(S^*T)$ i ominąć szczegóły techniczne związane z teorią wag o wartościach operatorowych.

Nasz iloczyn skalarny jest odpowiednikiem iloczynu GNS i potrzebujemy grupy modularnej, żeby zrobić z niego wersję KMS. Okazuje się ([Haa79, Proposition 6.1]), że można zdefiniować za pomocą ψ^{-1} grupę modularną na $B(H)$, która zależy od wyboru funkcjonału dodatniego na B' , ale jej obcięcie do B jest od tego wyboru niezależne. Co więcej, $\sigma_t^{\psi^{-1}}(b) = \sigma_{-t}(b)$. Z tej niezmienniczości wynika, że można zdefiniować działanie grupy modularnej na B' -bimodulach.

Stwierdzenie 4.5.7 ([H4, Lemma 3.13]). *Niech $V \subset B(H)$ będzie B' -bimodulem. Wówczas bimodul $\sigma_t^{\psi^{-1}}(V)$ nie zależy od żadnych wyborów.*

Dowód. Po pierwsze, mamy $\sigma_t^{\psi^{-1}}(B') = B'$, bo $\sigma_t^{\psi^{-1}}$ jest grupą modularną złożenia $\psi^{-1} \circ \phi$, gdzie $\phi : B' \rightarrow \mathbb{C}$ jest pewnym dodatnim funkcjonałem. Załóżmy, że mamy dwa takie funkcjonały: ϕ_1 i ϕ_2 . Wówczas złożenia $\psi^{-1} \circ \phi_1$ oraz $\psi^{-1} \circ \phi_2$ są zadane przez macierze gęstości ρ_1 i ρ_2 . W związku z tym grupy modularne są równe $\sigma_t^k(x) = \rho_k^{it} x \rho_k^{-it}$ (dla $k \in \{1, 2\}$). Skoro ich wartości zgadzają się na B , czyli $\rho_1^{it} b \rho_1^{-it} = \rho_2^{it} b \rho_2^{-it}$ dla każdego $b \in B$, to $u_t := \rho_1^{-it} \rho_2^{it} \in B'$. Ale V jest B' -bimodulem, czyli $u_t V u_t^* = V$, co pociąga za sobą równość $\sigma_t^1(V) = \sigma_t^2(V)$. To oznacza, że możemy napisać $\sigma_t^{\psi^{-1}}(V)$ i nie ma tu żadnej niejasności. $\square$

Używając grupy modularnej można przechodzić między iloczynami skalarnymi KMS a GNS. W związku z tym, żeby znaleźć bazę ortonormalną KMS dla bimodułu V , musimy rozważyć bimodul $\sigma_{-\frac{i}{4}}^{\psi^{-1}}(V)$ i znaleźć jego bazę ortonormalną GNS, czyli względem iloczynu skalarnego o wartościach w B' zadanego przez ψ^{-1} . Skoro B jest skończonej wymiarowej C^* -algebrą, to $B(H)$ jest samodualnym modulem Hilbertowskim i wszystkie $*$ -słabo domknięte bimoduly V dziedziczą tę własność. To oznacza, że $\sigma_{-\frac{i}{4}}^{\psi^{-1}}(V)$ posiada bazę ortonormalną, w związku z czym możemy zdefiniować rzut ortogonalny z $B(H)$ na $\sigma_{-\frac{i}{4}}^{\psi^{-1}}(V)$, który jest $*$ -słabo ciągłym odwzorowaniem B' -bimodulów. Z twierdzenia Haagerupa ([Smi91, Theorem 3.1]) wynika, że takie odwzorowanie jest postaci $x \mapsto \sum_k b_k x c_k$, gdzie $b_k, c_k \in B$. Odwzorowanie takie w miarę łatwo można przedstawić za pomocą elementu $P \in B \otimes B^{\text{op}}$. Trzeba tylko wziąć pod uwagę dwa fakty: chcemy reprezentować oryginalny rzut ortogonalny na bimodul V oraz prawe i lewe działanie muszą być zmodyfikowane przy użyciu grupy modularnej (dla iloczynu GNS tylko prawe działanie). W ten sposób dostajemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.5.8 ([H4, Theorem 3.15]). *Istnieje odpowiedniość między B' -bimodułami $V \subset B(H)$ oraz rzutami ortogonalnymi w $B \otimes B^{\text{op}}$. Co więcej, przeprowadza ona bimoduł V^* na rzut $\Sigma(P)$.*

4.5.1.2 Jawne wzory W tej części zakładamy, że $B := \bigoplus_{\alpha=1}^N M_{n_\alpha} \subset B(H)$, gdzie $H := \bigoplus_{\alpha=1}^N \mathbb{C}^{n_\alpha}$; B można wtedy opisać jako macierze blokowo diagonalne. Wówczas $B' = \text{span}\{\mathbb{1}_{n_\alpha}\}$, czyli jest to centrum algebry B . Wszystkie B' -bimoduły są więc postaci $V = \bigoplus_{\alpha,\beta} V_{\alpha\beta}$, gdzie $V_{\alpha\beta} \subset B(\mathbb{C}^{n_\alpha}, \mathbb{C}^{n_\beta})$ jest podprzestrzenią liniową. Bazę ortonormalną V można wtedy wyprodukować z baz ortonormalnych podprzestrzeni $V_{\alpha\beta}$. Funkcjonał ψ na B jest zadany przez macierze $(\rho_\alpha)_{\alpha=1}^N$ takie, że $\text{Tr}(\rho_\alpha^{-1}) = 1$. Na $B(H)$ rozważamy funkcjonał zadany przez macierz $\bigoplus_{\alpha=1}^N \rho_\alpha^{-1}$, który jest złożeniem warunkowej wartości oczekiwanej ψ^{-1} z odpowiednim śladem na B' . Można względem tego funkcjonału rozważyć iloczyn skalarny KMS i powiemy, że rodzina $(X_i^{\alpha\beta})_{i=1}^{n_{\alpha\beta}} \subset B(\mathbb{C}^{n_\alpha}, \mathbb{C}^{n_\beta})$ jest bazą ortonormalną $V_{\alpha\beta}$, jeśli $\text{Tr}((X_i^{\alpha\beta})^* \rho_\beta^{-\frac{1}{2}} X_j^{\alpha\beta} \rho_\alpha^{-\frac{1}{2}}) = \delta_{ij}$ oraz zbiór ten rozpinia $V_{\alpha\beta}$.

Stwierdzenie 4.5.9 ([H4, Proposition 3.29]). *Niech $V \subset B(H)$ będzie $*$ -słabo domkniętym B' -bimodułem. Wówczas stowarzyszony z nim rzut $P \in B \otimes B^{\text{op}}$ można zapisać jako $P = \bigoplus_{\alpha,\beta} P_{\beta\alpha}$, gdzie $P_{\beta\alpha} \in M_{n_\beta} \otimes M_{n_\alpha}^{\text{op}}$ jest zadany wzorem*

$$P_{\beta\alpha} := \sum_{i=1}^{n_{\alpha\beta}} \sum_{k=1}^{n_\alpha} \sum_{l=1}^{n_\beta} \rho_\beta^{-\frac{1}{4}} X_i^{\alpha\beta} e_{kl}^{\alpha\beta} \rho_\beta^{-\frac{1}{4}} \otimes (\rho_\alpha^{-\frac{1}{4}} (X_i^{\alpha\beta})^* e_{lk}^{\beta\alpha} \rho_\alpha^{-\frac{1}{4}})^{\text{op}}.$$

Podobnie można uzyskać jawny wzór na kwantową macierz sąsiedztwa.

Stwierdzenie 4.5.10 ([H4, Proposition 3.30]). *Kwantową macierz sąsiedztwa grafu kwantowego zadanego przez bimoduł V można zapisać wzorem*

$$A(e_{kl}^\alpha) = \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^{n_{\alpha\beta}} \rho_\beta^{-\frac{1}{4}} X_i^{\alpha\beta} \rho_\alpha^{\frac{1}{4}} e_{kl}^{\alpha\beta} \rho_\alpha^{\frac{1}{4}} (X_i^{\alpha\beta})^* \rho_\beta^{-\frac{1}{4}}.$$

Przypomnijmy sobie włożenie $M_n \ni x \mapsto \rho^{\frac{1}{4}} x \rho^{\frac{1}{4}} \in \text{HS}_n$. Dla każdego odwzorowania $A : M_n \rightarrow M_n$ mamy indukowane odwzorowanie $\hat{A} : \text{HS}_n \rightarrow \text{HS}_n$ zadane wzorem $\hat{A}(\rho^{\frac{1}{4}} x \rho^{\frac{1}{4}}) := \rho^{\frac{1}{4}} A(x) \rho^{\frac{1}{4}}$, w związku z czym $\hat{A}(x) = \rho^{\frac{1}{4}} A(\rho^{-\frac{1}{4}} x \rho^{-\frac{1}{4}}) \rho^{\frac{1}{4}}$. Jeśli byśmy w stwierdzeniu powyżej rozważyli odwzorowanie $\hat{A}$, to miałyby ono bardzo prosty wzór, mianowicie pojawiałyby się tylko operatory Krausa $X_i^{\alpha\beta}$, natomiast wszystkie macierze gęstości ρ_α by zniknęły, co przypomina wzór znany z przypadku śladowego. I nie jest to przypadek, ponieważ dzięki włożeniu $x \mapsto \rho^{\frac{1}{4}} x \rho^{\frac{1}{4}}$ możemy wyrazić iloczyn skalarny KMS za pomocą iloczynu skalarnego Hilberta-Schmidta, czyli zadanego przez ślad.

4.5.2 Nieskończone grafy kwantowe

W tej części będziemy zakładać, że $B = \ell^\infty - \bigoplus_{\alpha=1}^\infty M_{n_\alpha}$. Tym razem ψ już nie będzie funkcjonałem dodatnim na B , ale **wagą**, czyli będzie określony jedynie na gęstym podzbiorze;

należy myśleć o ψ jako o odpowiedniku miary liczącej na nieskończonym zbiorze, dla której nie wszystkie ograniczone funkcje są całkowalne. Mówiąc konkretniej, ψ będzie zadane przez ciąg dodatnich macierzy $(\rho_\alpha)_\alpha$ takich, że $\text{Tr}_{n_\alpha}(\rho_\alpha^{-1}) = 1$; nadal będziemy mówić, że ψ jest 1-formą. Waga ψ jest dobrze określona na elementach $c_{00}(\mathcal{B})$, czyli elementach $\mathcal{B}$ o skończonym nośniku. Dla dowolnego $x \in c_{00}(\mathcal{B})$ mamy $\psi(x) = \sum_\alpha \text{Tr}(\rho_\alpha x_\alpha)$, gdzie suma jest skończona, ponieważ $x_\alpha \neq 0$ jedynie dla skończonego wielu indeksów α .

Definicja przez kwantowe relacje pozostaje bez zmian. Podobnie jak w przypadku skończenia wymiarowym, $\psi^{-1} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}'$ jest warunkową wartością oczekiwaną, która definiuje iloczyn skalarny o wartościach w $\mathcal{B}'$. W tym przypadku jednak $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest jedynie modulem prehilbertowskim, ponieważ iloczyn skalarny nie zadaje zupełnej normy. Później opowiem trochę więcej na temat tego, które $\mathcal{B}'$ -bimoduły są zupełne w tej normie.

Tak samo jak w przypadku skończonym, każdy $*$ -słabo domknięty bimoduł $V \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ odpowiada rzutowi⁹ $P \in \mathcal{B} \overline{\otimes} \mathcal{B}^{\text{op}} \simeq \ell^\infty - \bigoplus_{\alpha, \beta} M_{n_\beta} \otimes M_{n_\alpha}^{\text{op}}$. Każdą składową $P_{\beta\alpha}$ możemy skonstruować za pomocą dokładnie tych samych wzorów, które wykorzystywaliśmy w przypadku skończenia wymiarowym. Równie łatwo z rzutu $P \in \mathcal{B} \overline{\otimes} \mathcal{B}^{\text{op}}$ wyprodukujemy bimoduł V .

Potencjalnie trudniejsze będzie zdefiniowanie kwantowej macierzy sąsiedztwa, ponieważ nawet w przypadku klasycznym macierz sąsiedztwa nie jest odwzorowaniem na $\ell^\infty(V)$. Za to każda macierz sąsiedztwa przekształca $c_{00}(V)$ w $\ell^\infty(V)$ i to posłuży nam jako definicja w przypadku nieskończonym. Warto w tym miejscu poczynić uwagę, że algebra $c_{00}(\mathcal{B})$ jest obiektem kanonicznie stowarzyszonym z *przestrzenią kwantową* $(\mathcal{B}, \psi)$, mianowicie jest to podalgebra generowana przez rzuty ortogonalne $p \in \mathcal{B}$ takie, że $\psi(p) < \infty$ ([H4, Lemma 2.5, Definition 3.17]).

Definicja 4.5.11. Niech $\mathcal{B} = \ell^\infty - \bigoplus_\alpha M_{n_\alpha}$ oraz niech ψ będzie 1-formą na $\mathcal{B}$. Powiemy, że całkowicie dodatnie odwzorowanie $A : c_{00}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ jest kwantową macierzą sąsiedztwa, jeśli dla dowolnego indeksu α i dowolnych $i, j \in [n_\alpha]$ zachodzi

$$\sum_{k=1}^{n_\alpha} A(e_{ik}^\alpha \rho_\alpha^{-1}) A(e_{kj}^\alpha) = A(e_{ij}^\alpha).$$

Jest to odpowiednik równości $m(A \otimes A)m^* = A$ używanej w przypadku skończonym.

Uwaga 4.5.12. W przypadku nieskończenia wymiarowym można zdefiniować $m^* : c_{00}(\mathcal{B}) \rightarrow c_{00}(\mathcal{B}) \otimes c_{00}(\mathcal{B})$, więc przy zachowaniu odrobiny ostrożności można zdefiniować kwantową macierz sąsiedztwa przy użyciu równości $m(A \otimes A)m^* = A$.

Podobnie jak w przypadku skończenia wymiarowym, z kwantową macierzą sąsiedztwa można stowarzyszyć uogólnioną macierz Choi

$$P := \sum_\alpha \sum_{i,j=1}^{n_\alpha} A(\rho_\alpha^{-\frac{1}{4}} e_{ij}^\alpha \rho_\alpha^{-\frac{1}{4}}) \otimes (\rho_\alpha^{-\frac{1}{4}} e_{ji}^\alpha \rho_\alpha^{-\frac{1}{4}})^{\text{op}}.$$

⁹Ta sytuacja jest specjalna dla nieskończonych sum algebr macierzowych i nie zachodzi dla ogólniejszych algebr von Neumanna.

Każdy składnik sumy P_α jest rzutem ortogonalnym, ponadto $P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha$, więc ich nieskończona suma również jest rzutem ortogonalnym (zbieżność w słabej topologii operatorowej na $B \overline{\otimes} B^{\text{op}}$). Gdy mamy zadany rzut $P \in B \overline{\otimes} B^{\text{op}}$, to A można odzyskać za pomocą tych samych wzorów, co w przypadku skończenia wymiarowym.

Warto wyróżnić parę szczególnych klas nieskończonych grafów kwantowych: grafy lokalnie skończone oraz grafy o ograniczonym stopniu. Te drugie posiadają ładną analityczną definicję.

Definicja 4.5.13. Powiemy, że kwantowa macierz sąsiedztwa $A : c_{00}(B) \rightarrow B$ jest **ograniczono stopnia**, jeśli A rozszerza się do $*$ -słabo ciągłego odwzorowania $A : B \rightarrow B$.

Uwaga 4.5.14. Klasyczne grafy o ograniczonym stopniu to faktycznie dokładnie te, których macierze sąsiedztwa są ciągłymi odwzorowaniami na $\ell^\infty(V)$ ([H4, Lemma 3.21]). Oznacza to dokładnie tyle, że wektor stopni jest elementem $\ell^\infty(V)$.

Definicja 4.5.15. Powiemy, że kwantowa macierz sąsiedztwa $A : c_{00}(B) \rightarrow B$ jest **lokalnie skończona**, jeśli $A_{\text{KMS}}^*(c_{00}(B)) \subset c_{00}(B)$.

Obie te własności można wyrazić w terminach stowarzyszonego rzutu $P \in B \overline{\otimes} B^{\text{op}}$. Ograniczony stopień oznacza, że $D := (\text{Id} \otimes \psi^{\text{op}})(P) \in B$; przykładamy wagę, a nie ograniczony funkcjonal, więc jest to nietrywialny warunek. Lokalna skończoność jest równoważna temu, że dla dowolnego indeksu β istnieje tylko skończenie wiele indeksów α takich, że $P_{\beta\alpha} \neq 0$, gdzie $P = (P_{\beta\alpha})_{\beta,\alpha}$. Tak samo łatwo można scharakteryzować bimoduły pochodzące od lokalnie skończonych kwantowych macierzy sąsiedztwa, ponieważ $V_{\alpha\beta} \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P_{\beta\alpha} \neq 0$.

Sytuacja jest ciekawsza w przypadku ograniczonego stopnia. Okazuje się, że to zagadnienie ma związki z teorią indeksu dla algebr von Neumanna ([PP86, Proposition 1.3]) – w pewnym sensie macierz stopni D może być interpretowana jako wymiar bimodułu V .

Twierdzenie 4.5.16 ([H4, Proposition 3.27]). *Niech $A : c_{00}(B) \rightarrow B$ będzie kwantową macierzą sąsiedztwa. A jest ograniczonego stopnia, jeśli dla dowolnej reprezentacji $B \subset B(H)$ bimoduł $\sigma_{\frac{i}{4}}^{\psi^{-1}}(V)$ jest B' -modułem Hilbertowskim, czyli jest zupełny.*

Uwaga 4.5.17. Z założenia na temat A można wywieść wniosek na temat bimodułu w dowolnej reprezentacji. Nie wiadomo natomiast, czy wiedza na temat jednej reprezentacji jest wystarczająca, by wywnioskować, że kwantowa macierz sąsiedztwa jest ograniczonego stopnia. To pytanie wiąże się z podobnym zagadnieniem w teorii indeksu ([FK98]), gdzie indeks zdefiniowany za pomocą odwzorowań dodatnich jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy indeks zdefiniowany za pomocą odwzorowań całkowicie dodatnich jest skończony.

W kolejnej części przedstawię naturalne przykłady nieskończonych grafów kwantowych.

4.6 Konstrukcje grafów kwantowych

Teraz opowiem o wynikach z prac [H2] oraz [H4], mianowicie przedstawię konstrukcję losowych grafów kwantowych oraz kwantowych grafów Cayleya.

4.6.1 Losowe grafy kwantowe

Za motywację posłużą nam modele Erdősa-Rényi'ego $G(n, p)$ oraz $G(n, M)$. W pierwszym z nich ustalamy liczbę wierzchołków n oraz prawdopodobieństwo $p \in (0, 1)$. Graf konstruujemy następująco – dowolną parę wierzchołków łączymy krawędzią z prawdopodobieństwem p i robimy to dla wszystkich par niezależnie. W modelu $G(n, M)$ ustalamy liczbę wierzchołków n oraz liczbę krawędzi M i losujemy graf z rozkładu jednostajnego na tym zbiorze. Niestety zbiór ten jest bardzo skomplikowany, więc trudno sobie wyobrazić, jak wygląda typowy taki graf. W związku z tym model $G(n, p)$ jest bardziej popularny, ale niestety jego uogólnienie na przypadek kwantowy jest trudniejsze, ponieważ wymaga użycia pojęcia wierzchołka. Natomiast model $G(n, M)$ wykorzystuje tylko globalne parametry liczbowe n i M , które łatwo można zdefiniować dla grafów kwantowych. Pośrednio pozwala to też zdefiniować analogon modelu $G(n, p)$, ponieważ obcięcie rozkładu $G(n, p)$ do zbioru grafów o M krawędziach jest rozkładem jednostajnym, więc $G(n, p)$ można uzyskać jako ważoną średnią rozkładów $G(n, M)$.

Skupimy się tylko na przykładzie algebry $B = M_n$ wyposażonej w ślad $\tau(x) := n \operatorname{Tr}(x)$. Naturalnym odpowiednikiem rozmiaru grafu jest wymiar algebry, czyli n^2 , natomiast odpowiednikiem liczby krawędzi będzie wymiar podprzestrzeni $V \subset M_n$. Przypomnijmy, że jeśli $V_1, \dots, V_d$ jest bazą ortonormalną V względem iloczynu skalarnego Hilberta Schmidta, to $Ax = n \sum_{i=1}^d V_i x V_i^*$. W związku z tym $D := A\mathbb{1} = n \sum_{i=1}^d V_i V_i^*$. Po przyłożeniu śladu otrzymamy równość $\dim(V) = d = \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(D)$, czyli wymiar V można interpretować jako średni stopień wierzchołka; ta wielkość jest proporcjonalna do liczby krawędzi, więc może być stosowana jako zamiennik M .

Chcemy rozważać jedynie nieskierowane grafy kwantowe, czyli podprzestrzenie $V \subset M_n$ takie, że $V = V^*$ o ustalonym wymiarze d . Jaki powinien być rozkład prawdopodobieństwa? Przestrzeń V jest rozpięta przez macierze hermitowskie, można więc myśleć o *rzeczywistej* d -wymiarowej podprzestrzeni macierzy hermitowskich. Zbiór takich podprzestrzeni to znana rozmaitość, czyli Grassmannian $\operatorname{Gr}(d, n^2)$. Ta rozmaitość jest zwartą przestrzenią jednorodną $O(n^2)/(O(n^2 - d) \times O(d))$, więc posiada dokładnie jedną miarę probabilistyczną μ niezmienniczą na działanie $O(n^2)$; jest to w pewnym sensie rozkład jednostajny na $\operatorname{Gr}(d, n^2)$. Chcemy opisać ten rozkład w bardziej konkretny sposób. Najprostszym sposobem wydaje się wzięcie d niezależnych macierzy hermitowskich; okazuje się, że to podejście działa.

Definicja 4.6.1 ([H2, Definition 1.14, Remark 1.15]). Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i $d \in \{0, \dots, n^2\}$. Wybierzmy d niezależnych macierzy hermitowskich $X_1, \dots, X_d$ zgodnie z rozkładem GUE (Gaussian Unitary Ensemble); są to macierze Gaussowskie których elementy nad i na przekątnej są niezależne. Rozważamy podprzestrzeń $V := \operatorname{span}\{X_1, \dots, X_d\} \subset M_n$. Prawie na pewno jest to d -wymiarowa podprzestrzeń i indukowany rozkład na Grassmannianie to miara niezmiennicza μ . Ten model losowego grafu kwantowego oznaczamy jako $QG(n, d)$.

Uwaga 4.6.2. W pracy [H2] rozważane są systemy operatorowe V , czyli podprzestrzenie spełniające $V = V^*$ oraz $\mathbb{1} \in V$. Założenie $\mathbb{1} \in V$ jest naturalne z punktu widzenia informacji kwantowej, ale nie jest konieczne, więc mogłoby zaciemniać obraz. Wersje twierdzeń przedstawione w tym tekście łatwo wynikają z twierdzeń udowodnionych w pracy [H2].

W ten sposób można skonstruować bardzo wiele różnych grafów kwantowych oraz badać typowe własności. Później przedstawię wyniki na temat symetrii tych obiektów.

4.6.2 Kwantowe grafy Cayleya

W tej części $\mathbb{F}$ będzie dyskretną grupą kwantową. W klasycznym przypadku macierz sąsiedztwa grafu Cayleya jest operatorem spłotowym i tak będzie również w naszym przypadku. Będziemy musieli więc sprawdzić, które operatory spłotowe są kwantowymi macierzami sąsiedztwa. Najpierw musimy jednak wyjaśnić, jak definiuje się spłot na grupie kwantowej.

Definicja 4.6.3. Niech $\mathbb{F}$ będzie dyskretną grupą kwantową i niech $\omega_1, \omega_2 \in \ell^\infty(\mathbb{F})_*$ będą $*$ -słabo ciągłymi funkcjonalami. Wtedy definiujemy spłot jako $\omega_1 * \omega_2 := (\omega_1 \otimes \omega_2) \circ \Delta_{\mathbb{F}}$.

To jest odpowiednik spłotu miar, chcemy również splatać funkcje. Można to zrobić przez utożsamienie funkcji z miarą Haara z odpowiednią gęstością. W naszym przypadku mamy dwie miary Haara, lewą i prawą, więc musimy dokonać wyboru; w tym tekście, podobnie jak w pracy [H4], będziemy posługiwać się prawą miarą Haara. Przypomnijmy, że $\ell^\infty(\mathbb{F}) \simeq \ell^\infty - \bigoplus_{\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})} M_{n_\alpha}$, gdzie $\text{Irr}(\mathbb{G})$ jest zbiorem (klas równoważności) nieprzywiedlnych reprezentacji zwartej grupy kwantowej $\mathbb{G}$ dualnej do $\mathbb{F}$. Z każdą reprezentacją α jest stowarzyszona pewna dodatnia macierz ρ_α taka, że $\text{Tr}(\rho_\alpha) = \text{Tr}(\rho_\alpha^{-1}) =: \dim_q(\alpha)$. Liczbę tę nazywamy kwantowym wymiarem reprezentacji i spełnia ona nierówność $\dim_q(\alpha) \geq \dim(\alpha)$, przy czym równość zachodzi tylko dla $\rho_\alpha = \mathbb{1}$. Możemy teraz podać wzory na miary Haara na $\mathbb{F}$.

Stwierdzenie 4.6.4 ([Wor87a, Proposition A 2.1, Proposition A 2.2]). *Niech $\mathbb{F}$ będzie dyskretną grupą kwantową. Wtedy istnieją wagi Haara $\widehat{h}_R$ oraz $\widehat{h}_L$ zadane wzorami*

$$\begin{aligned}\widehat{h}_R(x) &:= \sum_{\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})} \dim_q(\alpha) \text{Tr}(\rho_\alpha x_\alpha) \\ \widehat{h}_L(x) &:= \sum_{\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})} \dim_q(\alpha) \text{Tr}(\rho_\alpha^{-1} x_\alpha)\end{aligned}\tag{4.4}$$

dla dowolnego $x \in c_{00}(\mathbb{F})$.

Uwaga 4.6.5. Dla $\widehat{h}_R$ na każdym bloku mamy funkcjonal zadany przez macierz $\sigma_\alpha := \dim_q(\alpha) \rho_\alpha$, która spełnia $\text{Tr}(\sigma_\alpha^{-1}) = 1$, więc $\widehat{h}_R$ jest 1-formą. Podobnie sytuacja wygląda dla $\widehat{h}_L$.

Dla dowolnych elementów $x, y \in c_{00}(\mathbb{F})$ zdefiniujemy ich spłot w następujący sposób: rozważymy spłot funkcjonałów $\widehat{h}_R(\cdot x) * \widehat{h}_R(\cdot y)$, który jest postaci $\widehat{h}_R(\cdot z)$ dla dokładnie jednego elementu $z \in c_{00}(\mathbb{F})$, który oznaczymy jako $x * y$. Spłot można również zdefiniować w ogólniejszej sytuacji, na przykład dla $x \in c_{00}(\mathbb{F})$ oraz $y \in \ell^\infty(\mathbb{F})$. Oznacza to, że dla dowolnego $x \in c_{00}(\mathbb{F})$ można zdefiniować operator spłotu $x* : \ell^\infty(\mathbb{F}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{F})$. Sprawdźmy, które z tych operatorów są kwantowymi macierzami sąsiedztwa, ale w tym celu musimy opisać podstawowe własności transformaty Fouriera, która jest bardzo ważnym narzędziem w badaniu operatorów spłotowych.

Definicja 4.6.6. Niech $W \in \ell^\infty(\Gamma) \overline{\otimes} L^\infty(\mathbb{G})$ będzie operatorem multiplikatywnym unitarnym. **Transformatą Fouriera** funkcjonału $\omega \in \ell^\infty(\Gamma)_*$ nazywamy element $\widehat{\omega} := (\omega \otimes \text{Id})(W) \in L^\infty(\mathbb{G})$. Dla $x \in c_{00}(\Gamma)$ $\widehat{x}$ będzie transformatą Fouriera funkcjonału $\widehat{h_R}(\cdot x)$.

Lemat 4.6.7 ([H4, Lemma 4.4]). Mamy $\widehat{e_{ij}^\alpha \rho_\alpha^{-1}} = \dim_q(\alpha) u_{ji}^\alpha$, zatem możemy wyznaczyć jawny wzór na transformatę Fouriera dowolnego elementu $x \in c_{00}(\Gamma)$.

Co więcej, mamy $\widehat{x_1 x_2} = \widehat{x_2} * \widehat{x_1}$ oraz $\widehat{x_1 * x_2} = \widehat{x_2} \widehat{x_1}$. Korzystając z tych faktów możemy sprawdzić, które operatory splotowe są kwantowymi macierzami sąsiedztwa.

Stwierdzenie 4.6.8 ([H4, Proposition 4.8]). Niech $P_1, P_2 \in c_{00}(\Gamma)$. Rozważmy operatory splotowe $A_1 x := P_1 * x$ oraz $A_2 x := P_2 * x$. Wtedy $(A_1 \bullet A_2)(x) = P_1 P_2 * x$.

Dowód. Operator $A := A_1 \bullet A_2$ jest zadany wzorem

$$A(e_{ij}^\alpha \rho_\alpha^{-1}) = \sum_k A_1(e_{ik}^\alpha \rho_\alpha^{-1}) A_2(e_{kj}^\alpha \rho_\alpha^{-1}).$$

Po przyłożeniu transformaty Fouriera dostajemy równość

$$\widehat{A}(u_{ji}^\alpha) = \sum_k u_{jk}^\alpha \widehat{P_2} * u_{ki}^\alpha \widehat{P_1}.$$

Skoro jest to prawda dla dowolnego elementu macierzowego u_{ji}^α , dla gęstego podzbioru mamy

$$\widehat{A}(x) = \sum x_{(1)} \widehat{P_2} * x_{(2)} P_1,$$

gdzie $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$. Elementarny rachunek pokazuje, że $\sum x_{(1)} \widehat{P_2} * x_{(2)} P_1 = x \widehat{P_2} * \widehat{P_1}$. Wobec tego $\widehat{A}(x) = x \widehat{P_2} * \widehat{P_1}$, zatem $Ax = P_1 P_2 * x$. $\square$

Stwierdzenie 4.6.9 ([H4, Proposition 4.9]). Niech $P \in c_{00}(\Gamma)$ oraz $x \in \ell^\infty(\Gamma)$. Wtedy $(P * x)^* = P^* * x^*$, zatem $Ax := P * x$ jest (rzeczywistą) kwantową macierzą sąsiedztwa wtedy i tylko wtedy, gdy $P = P^* = P^2$.

Dowód. Z poprzedniego stwierdzenia wynika, że warunek $A \bullet A = A$ jest równoważny równości $P = P^2$. Z kolei równość $(P * x)^* = P^* * x^*$ można łatwo sprawdzić, korzystając z definicji splotu i własności grupy modularnej. Oznacza ona, że warunek $(A(x))^* = A(x^*)$ jest równoważny $P = P^*$. $\square$

Wobec powyższego możemy łatwo konstruować (nieskończone) grafy kwantowe przy użyciu operatorów splotowych. Dla klasycznego grafu Cayleya grupy Γ macierz sąsiedztwa również jest operatorem splotowym – splatamy z funkcją charakterystyczną zbioru generującego T . O zbiorze T najczęściej zakłada się trzy rzeczy:

- T generuje grupę Γ ;
- $T = T^{-1}$;

- $e \notin T$.

Zacznijmy od warunku drugiego. Odpowiednikiem odwrotności w teorii grup kwantowych jest **antypoda** S , czyli operator $S : c_{00}(\mathbb{F}) \rightarrow c_{00}(\mathbb{F})$, który w przypadku klasycznym jest zadany wzorem $(Sf)(g) := f(g^{-1})$. Pojawiają się jednak pewne trudności, mianowicie S jest często operatorem nieograniczonym, spełnia $S^2 \neq \text{Id}$ oraz nie zachowuje $*$. Na szczęście S posiada rozkład biegunowy $S = \tau_{-\frac{1}{2}} R$, gdzie $\tau_{-\frac{1}{2}}$ jest rozszerzeniem analitycznym tak zwanej **grupy skalowania**, natomiast R jest **unitarną antypodą**, która ma wszystkie typowe własności, czyli jest $*$ -antyautomorfizmem $\ell^\infty(\mathbb{F})$ oraz spełnia $R^2 = \text{Id}$.

Stwierdzenie 4.6.10 ([H4, Theorem 4.10]). *Niech $P = P^* \in c_{00}(\mathbb{F})$. Wówczas $S(P) = P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Ax := P * x$ jest operatorem samosprzężonym względem iloczynu skalarnego GNS, natomiast $R(P) = P$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest operatorem samo-sprzężonym względem iloczynu skalarnego KMS.*

W definicji kwantowych grafów Cayleya będziemy zatem zakładać, że $R(P) = P$. Jeśli chodzi o warunek $e \notin S$, to zastąpimy go równością $\varepsilon(P) = 0$, gdzie ε jest **kojedynką** na $\ell^\infty(\mathbb{F})$. Konkretniej $\varepsilon(x) = x_{\text{triv}}$, gdzie w rozkładzie $\ell^\infty(\mathbb{F}) = \ell^\infty - \bigoplus_{\alpha \in \text{Irr}(\widehat{\mathbb{F}})} M_{n_\alpha} x_{\text{triv}}$ jest składową odpowiadającą reprezentacji trywialnej. Warunek $m(A \otimes \text{Id})m^* = 0$ również jest temu równoważny.

Pozostaje kwestia opisanego zbioru generującego.

Definicja 4.6.11. Niech $Ax := P * x$. Wówczas $A^k(x) = (P^{*k}) * x$. Dla dowolnego elementu samosprzężonego $T \in \ell^\infty(\mathbb{F})$ oznaczamy przez $[T]$ jego nośnik, czyli najmniejszy rzut ortogonalny taki, że $T[T] = T$. Powiemy, że rzut P jest **generujący**, jeśli $\bigvee_n [P^{*n}] = \mathbb{1}$.

Uwaga 4.6.12 ([H4, Proposition 5.3]). Jeśli wystartujemy od zbioru S nieprzywiedlnych reprezentacji grupy kwantowej $\widehat{\mathbb{F}}$, to możemy z nim stowarzyszyć rzut $P_S := \bigoplus_{\alpha \in S} \mathbb{1}_{n_\alpha}$, który należy do centrum $\ell^\infty(\mathbb{F})$. Ten rzut spełnia $P_S = R(P_S)$, gdy zbiór S jest zamknięty ze względu na sprzężenie (czyli na unitarną wersję reprezentacji kontragedientnej), natomiast $\varepsilon(P_S) = 0$, gdy S nie zawiera reprezentacji trywialnej. P_S jest rzutem generującym, gdy S jest generującym zbiorem reprezentacji, czyli każda nieprzywiedlna reprezentacji $\widehat{\mathbb{F}}$ jest zawarta w iloczynie tensorowym reprezentacji z S .

Definicja 4.6.13. Niech $P = P^* \in c_{00}(\mathbb{F})$ będzie rzutem generującym takim, że $R(P) = P$ oraz $\varepsilon(P) = 0$; niech $Ax := P * x$. Wtedy graf kwantowy $(\ell^\infty(\mathbb{F}), \widehat{h_R}, A)$ nazywamy **kwantowym grafem Cayleya** grupy kwantowej $\mathbb{F}$.

Gdy mamy dwa różne rzuty grafy Cayleya $\mathbb{F}$, to są one bilipschitzowsko równoważne ([H4, Theorem 5.10]); grafy kwantowe są kwantowymi przestrzeniami metrycznymi w sensie Kuperberga-Weavera ([KW12]), co pozwala na sformułowanie pojęcia bilipschitzowskiej równoważności.

Dzięki tej strukturze można próbować stosować metody geometrycznej teorii grup, to znaczy używać struktury metrycznej do badania grup. Bardzo prostym przykładem jest

stwierdzenie, że grupa o podwykładniczym wzroście musi być średniowalna. Żeby zilustrować przydatność kwantowych grafów Cayleya, udowodniłem odpowiednik tego wyniku ([H4, Proposition 5.15]); ogólniejsza wersja tego twierdzenia, wyrażona w innym języku, została już udowodniona w [Kye08].

W Przykładzie 4.4.28 przedstawiliśmy pewne klasy zwartych grup kwantowych. Dla ich dyskretnych grup dualnych możemy skonstruować kwantowe grafy Cayleya, korzystając z generującego zbioru reprezentacji jak w Uwadze 4.6.12. W przypadku $SU_q(2)$ i O_F^+ można wybrać reprezentację definiującą, która jest równoważna z dualną, natomiast w przypadku U_F^+ musimy do reprezentacji definiującej U dodać jej dualną $\bar{U}$. Kwantowe grafy Cayleya $\widehat{SU_q(2)}$ są nieizomorficzne dla różnych parametrów $q \in (0, 1]$, ponieważ wymiar kwantowy jest zachowywany przez izomorfizm grafów kwantowych. Kwantowy graf Cayleya U_F^+ [H4, Example 5.16] posiada cechu sprawiające, że można go uznać za drzewo, pomimo braku dobrej definicji drzewa dla grafów kwantowych. Problem ten wynika z trudności zdefiniowania ścieżek w grafie kwantowym.

4.7 Symetrie grafów kwantowych

W tej części opowiem o symetriach losowych grafów kwantowych oraz o związkach *kwantowych* izomorfizmów z nielokalnymi grami znanymi z teorii kwantowej informacji. Więcej informacji na temat symetrii kwantowych grafów Cayleya będzie można znaleźć w pracy [BGM⁺].

4.7.1 Losowe grafy kwantowe

Główny wynik z pracy [H2] jest łatwy do sformułowania.

Twierdzenie 4.7.1 ([H2, Theorem C]). *Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i $d \in \{2, \dots, n^2 - 2\}$. Dla prawie każdego wyboru macierzy hermitowskich $X_1, \dots, X_d \in M_n$ grupa automorfizmów grafu kwantowego $V_d := \text{span}\{X_1, \dots, X_d\} \subset M_n$ jest trywialna.*

Sprecyzowania wymaga określenie „prawie każdego wyboru”. Oznacza to, że zbiór krotek $(X_1, \dots, X_d)$, dla których zachodzi twierdzenie jest otwartym, gęstym zbiorem w topologii Zariskiego na $\mathbb{R}^{n^2d}$. To pociąga za sobą fakt, że dopełnienie tego zbioru jest miary Lebesgue’a zero. Czym są automorfizmy V_d ? To takie $*$ -automorfizmy ϕ C^* -algebry M_n , że $\phi(V_d) = V_d$. Motywacja dla tej definicji jest taka, że chcemy mieć bijekcję zbioru wierzchołków ($*$ -automorfizm M_n), które zachowuje krawędzie (czyli V_d). Wszystkie $*$ -automorfizmy M_n są postaci $\phi(x) = UxU^*$ dla pewnej macierzy unitarnej, więc twierdzenie sprowadza się do następującego faktu: jeśli $UV_dU^* = V_d$, to macierz U jest skalarna. Prawdziwa jest też trochę silniejsza wersja tego twierdzenia, mianowicie jedyny automorfizm V_d jako systemu operatorowego to identyczność ([H2, Corollary E]).

Wynik ten jest optymalny, jeśli chodzi o zakres d . Potrzebujemy $d \geq 2$, ponieważ dla $d = 1$ C^* -algebra generowana przez V_d jest przemienna i dowolna unitarna macierz z tej algebry będzie automorfizmem. Dopełnienie ortogonalne zachowuje grupę symetrii, skąd dostajemy

ograniczenie $d \leq n^2 - 2$. W przypadku $d = 1$ grupa symetrii będzie nietrywialna, ale prawie zawsze przemieniana ([H2, Theorem B]).

Dowód przemienności można przeprowadzić wykorzystując kwantową macierz sąsiedztwa A oraz macierz stopni $D := A\mathbf{1}$. Warunek symetrii na poziomie A oznacza, że $A(UxU^*) = UA(x)U^*$, skąd wnioskujemy, że $UD = DU$. Jeśli więc D ma jednokrotne wartości własne, to każda symetria U będzie diagonalna w bazie, w której diagonalna jest macierz D , więc wszystkie symetrie są przemienne. D posiada wielokrotną wartość własną tylko wtedy, gdy rugownik wielomianu charakterystycznego D oraz jego pochodnej jest równy 0. Jest to warunek wielomianowy, więc albo jest spełniony wszędzie, albo na zbiorze miary zero. Wystarczy zatem wskazać jeden przykład, dla którego D ma jednokrotne własności własne. Można go skonstruować z użyciem odrobiny losowości ([H2, Theorem 3.24]).

Jeśli chodzi o trywialność grupy automorfizmów, można udowodnić, że generycznie grupa automorfizmów jest „taka sama” ([H2, Corollary 3.5, Notation 3.7]). Dowód głównego twierdzenia można przeprowadzić indukcyjnie, gdzie kilka małych przypadków trzeba sprawdzić ręcznie (główny krok to [H2, Proposition 3.13]).

W pewnych przypadkach ($n \geq 6$, $4 \leq d \leq n^2 - 5$) można skonstruować krotkę, dla której grupa automorfizmów jest trywialna ([H2, Theorem 3.25]).

4.7.2 Kwantowe izomorfizmy

Kwantowe izomorfizmy między grafami kwantowymi po raz pierwszy pojawiły się w pracy [MRV18]. W [H1] pojawiło się uogólnienie do przypadku nieśladowego oraz związku kwantowych izomorfizmów z monoidalną równoważnością grup kwantowych.

Monoidalna równoważność zwartych grup kwantowych wywodzi się z dualności Tannaki-Kreina (udowodnionej dla zwartych grup kwantowych przez Woronowicza [Wor88]). W przypadku grup przemiennych mamy do czynienia z dualnością Pontriagina, gdzie obiektem dualnym jest inna grupa przemieniana, tak zwana grupa charakterów, czyli reprezentacji jednowymiarowych. W ogólności charakterów jest zbyt mało, by uzyskać pełnię informacji na temat naszej grupy, więc należy rozważyć ogólniejsze reprezentacje – w przypadku zwartym, o którym mowa, można się ograniczyć do reprezentacji skończone wymiarowych. Składają się one na **kategorię reprezentacji**, która posiada informację na temat sum prostych, iloczynów tensorowych itp. Dualność Tannaki-Kreina orzeka, że jeśli ta kategoria stanie się konkretna, to znaczy mamy zadany funktor do kategorii skończone wymiarowych przestrzeni Hilberta, to możemy odzyskać zwartą grupę kwantową. Czasami można skonstruować wiele takich funktorów i w ten sposób skonstruować nieizomorficzne grupy kwantowe o tej samej kategorii reprezentacji; grupy takie nazywamy **monoidalnie równoważnymi** ([BDRV06]). Na przykład grupy kwantowe O_F^+ są zawsze monoidalnie równoważne z $SU_q(2)$ dla odpowiednio dobranego parametru $q \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ (Przykład 4.4.28).

W pracy [MRV18, Remark 5.17, Remark 5.18, Proposition 5.19] został opisany związek kwantowych izomorfizmów z kwantowymi grupami automorfizmów znanymi z teorii grup kwantowych ([Wan98], [Ban05]). W [H1] definicja ta została rozszerzona na przypadek nieśladowy i opisana w terminach bardziej standardowych w teorii algebr operatorów.

Definicja 4.7.2 ([H1, Definition 3.7, Proposition 3.8]). Niech $\mathcal{G} := (B, \psi, A)$ będzie grafem

kwantowym. Powiemy, że zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G}$ działa na $\mathcal{G}$, jeśli istnieje $*$ -homomorfizm $\alpha : B \rightarrow B \otimes C(\mathbb{G})$ taki, że

- $(\alpha \otimes \text{Id}) \circ \alpha = (\text{Id} \otimes \Delta_{\mathbb{G}}) \circ \alpha$;
- $\alpha \circ A = (A \otimes \text{Id}) \circ \alpha$;
- $(\psi \otimes \text{Id}) \circ \alpha(\cdot) = \psi(\cdot)\mathbf{1}$.

Kwantową grupą automorfizmów nazywamy uniwersalną zwartą grupę kwantową $\text{Qut}(\mathcal{G})$, która działa na $\mathcal{G}$, czyli taką, przez którą faktoryzuje się dowolne inne działanie. Taki obiekt istnieje i jest jedyny.

Musimy również zdefiniować pojęcie kwantowego izomorfizmu.

Definicja 4.7.3 ([H1, Definition 4.4]). Niech $\mathcal{G}_1 := (B_1, \psi_1, A_1)$ oraz $\mathcal{G}_2 := (B_2, \psi_2, A_2)$ będą grafami kwantowymi. Powiemy, że $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$ są **algebraicznie kwantowo izomorficzne**, jeśli istnieją $*$ -algebry z jedynką C_{12} i C_{21} oraz $*$ -homomorfizmy $\alpha_{12} : B_1 \rightarrow B_2 \otimes C_{21}$ i $\alpha_{21} : B_2 \rightarrow B_1 \otimes C_{12}$ takie, że

- $(\psi_2 \otimes \text{Id}) \circ \alpha_{12}(\cdot) = \psi_1(\cdot)\mathbf{1}$;
- $\alpha_{12} \circ A_1 = (A_2 \otimes \text{Id}) \circ \alpha_{12}$;
- $(\psi_1 \otimes \text{Id}) \circ \alpha_{21}(\cdot) = \psi_2(\cdot)\mathbf{1}$;
- $\alpha_{21} \circ A_2 = (A_1 \otimes \text{Id}) \circ \alpha_{21}$.

Powiemy, że $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$ są **C^* -algebraicznie kwantowo izomorficzne**, jeśli możemy znaleźć C^* -algebry C_{12} oraz C_{21} takie, że powyższe warunki są spełnione.

Uwaga 4.7.4. Podobnie jak w przypadku kwantowych automorfizmów, można rozważyć uniwersalne obiekty, dla których takie $*$ -homomorfizmy istnieją; oznaczamy je jako $C_{21} = \mathcal{O}(\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1)$ oraz $C_{12} = \mathcal{O}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$. O $\mathcal{O}(\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1)$ myślimy jako o przestrzeni kwantowych izomorfizmów z $\mathcal{G}_2$ do $\mathcal{G}_1$ i istnieje odwzorowanie udające odwrotność $S : \mathcal{O}(\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)^{\text{op}}$, które pozwala utożsamiać algebrę $\mathcal{O}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ z algebrą przeciwną do $\mathcal{O}(\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1)$. Dlatego najczęściej pracuje się tylko z jedną z tych algebr.

Na zbiorze izomorfizmów między dwiema przestrzeniami X i Y działają grupy symetrii tych przestrzeni, jedna z lewej, natomiast druga z prawej. Tak jest również w przypadku kwantowym i działania te zadają na $\mathcal{O}(\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1)$ specjalną strukturę.

Definicja 4.7.5. Niech $\mathbb{G}_1$ i $\mathbb{G}_2$ będą zwartymi grupami kwantowymi. Powiemy, że $*$ -algebra C jest **rozszerzeniem bigalois**, jeśli istnieją działania $\alpha : C \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{G}_1) \otimes C$ oraz $\beta : C \rightarrow C \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G}_2)$ takie, że odwzorowania $\kappa_l(x \otimes y) := \alpha(x)(\mathbf{1} \otimes y)$ oraz $\kappa_r(x \otimes y) := (x \otimes \mathbf{1})\beta(y)$ są bijekcjami, gdzie $x, y \in C$.

Twierdzenie 4.7.6 ([H1, Theorem 4.5]). *Jeśli $\mathcal{O}(\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1) \neq 0$, to istnieją takie działania $\text{Qut}(\mathcal{G}_1)$ oraz $\text{Qut}(\mathcal{G}_2)$, że $\mathcal{O}(\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1)$ staje się rozszerzeniem bigalois.*

Warto wspomnieć o związku rozszerzeń bigalois z monoidalną równoważnością: grupy kwantowe $\mathbb{G}_1$ oraz $\mathbb{G}_2$ są monoidalnie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozszerzenie bigalois C wyposażone w stan niezmienniczy na działanie $\mathbb{G}_1$ oraz $\mathbb{G}_2$ ([BDRV06, Proposition 3.13]). W naszym przypadku warunek istnienia takiego stanu jest spełniony automatycznie ([H1, Theorem 4.7]). W szczególności algebraicznie kwantowo izomorficzne grafy kwantowe są C^* -algebraicznie kwantowo izomorficzne ([H1, Corollary 4.8]): jeśli $\mathcal{O}(\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1)$ posiada stan, to C^* -algebrę można zbudować z wykorzystaniem konstrukcji GNS. Te wyniki ujawniają silne związki monoidalnej równoważności z kwantowymi izomorfizmami.

Może się wręcz wydawać, że są to pojęcia tożsame, ale tak nie jest. Na przykład graf pełny i graf trywialny na tym samym zbiorze wierzchołków mają te same kwantowe grupy automorfizmów (kwantowe grupy permutacji S_n^+), natomiast nie są kwantowo izomorficzne, ponieważ kwantowy izomorfizm grafów zachowuje spektrum macierzy sąsiedztwa. Kategoria reprezentacji grupy kwantowej $Qut(\mathcal{G})$ jest generowana (w odpowiednim sensie) przez obiekt B oraz morfizmy $m : B \otimes B \rightarrow B$, $A : B \rightarrow B$ oraz $\psi : B \rightarrow \mathbb{C}$. Różnica tych pojęć polega więc na tym, że kwantowy izomorfizm to monoidalna równoważność, która przeprowadza jedną kwantową macierz sąsiedztwa na drugą, czyli w jakimś sensie wyróżnia te morfizmy w kategorii reprezentacji.

Wiemy już, że jeśli mamy dwa grafy kwantowe o monoidalnie równoważnych kwantowych grupach automorfizmów, to niekoniecznie oznacza, że grafy te muszą być kwantowo izomorficzne. Okazuje się jednak, że monoidalna równoważność pozwala czasami zbudować strukturę grafu kwantowego.

Twierdzenie 4.7.7 ([H1, Theorem 4.11]). *Niech $\mathcal{G}$ będzie grafem kwantowym z kwantową grupą automorfizmów $Qut(\mathcal{G})$. Załóżmy, że zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G}$ jest monoidalnie równoważna z $Qut(\mathcal{G})$. Wówczas istnieje graf kwantowy $\mathcal{G}_1$ taki, że $Qut(\mathcal{G}_1) \simeq \mathbb{G}$.*

Uwaga 4.7.8. Warto wspomnieć o tym, że nawet jeśli $\mathcal{G}$ jest klasycznym grafem, to $\mathcal{G}_1$ może być grafem kwantowym. Za przykład mogą posłużyć graf pełny na n^2 wierzchołkach oraz kwantowy graf pełny na M_n , które są kwantowo izomorficzne.

4.7.2.1 Zastosowania w informacji kwantowej Pojęcie kwantowego izomorfizmu grafów kwantowych zostało zainspirowane przez kwantowe izomorfizmy klasycznych grafów ([AMR⁺19],[LMR20]), które z kolei pojawiły się w teorii nielokalnych gier. Gra nielokalna polega na tym, że dwójka graczy może ustalić wspólną strategię przed rozgrywką, ale w trakcie gry nie może się komunikować. Rozgrywka wygląda następująco: sędzia wysyła do każdego z graczy po jednym pytaniu, a następnie sprawdza, czy odpowiedzi spełniają kryteria gry. Mówi się o takich grach, że są nielokalne, bo graczy można ustawić nawet tak daleko od siebie, żeby skończoność prędkości światła nie pozwalała im na komunikację.

Najprościej zrozumieć tę koncepcję na przykładzie. Powiedzmy, że mamy dwa grafy G i H o n wierzchołkach (bez pętli). Każdy z graczy dostaje od sędziego wierzchołek z grafu G (g_1 i g_2) i musi odpowiedzieć wierzchołkiem z grafu H (h_1 i h_2). Reguły są następujące:

- Jeśli gracze dostają ten sam wierzchołek, to muszą odpowiedzieć w ten sam sposób;

- Jeśli wierzchołki g_1 i g_2 są połączone krawędzią, to również h_1 i h_2 muszą być połączone krawędzią;
- Jeśli $g_1 \neq g_2$ nie są połączone krawędzią, to również $h_1 \neq h_2$ nie mogą być połączone krawędzią.

Gracze wygrywają, jeśli ich odpowiedzi spełniają wszystkie trzy warunki. Jeśli gracze znajdują strategię taką, że zawsze wygrywają, to nazywamy ją strategią idealną. Co by to oznaczało w tym przypadku? Można założyć, że gracze w jakiś sposób losują odpowiedź, ale każda losowa strategia może być zapisana jako wypukła kombinacja strategii deterministycznych, więc musiałyby też istnieć idealna strategia deterministyczna. Wobec tego gracze mają funkcje f_1 i f_2 takie, że $h_1 = f_1(g_1)$ oraz $h_2 = f_2(g_2)$. Z pierwszego warunku wynika, że $f_1 = f_2 =: f$. Z drugiego i trzeciego warunku wynika, że funkcja f jest iniektywna: dwa różne wierzchołki g_1 i g_2 albo są połączone krawędzią, albo nie, i wówczas $f(g_1)$ i $f(g_2)$ będą w tej samej relacji, czyli nie mogą być równe. Skoro oba grafy mają n wierzchołków, to f jest bijekcją. Z drugiego warunku wynika, że f jest homomorfizmem grafów. Z połączenia warunków drugiego i trzeciego wynika, że f^{-1} również jest homomorfizmem grafów, zatem grafy G i H są izomorficzne.

W związku z tym w przypadku klasycznym taką grę można wygrywać ze stuprocentową skutecznością tylko dla pary izomorficznych grafów. W przypadku kwantowym dopuszcza się istnienie stanu splątanego, którego lokalnych pomiarów (z wykorzystaniem operatorów) dokonują gracze. Czasami zdarza się, że w takiej wersji gry istnieje idealna strategia, mimo że grafy nie są izomorficzne ([AMR⁺19, Theorem 6.4]). To prowadzi do pojęcia kwantowego izomorfizmu grafów, którego uogólnienie dla grafów kwantowych opisaliśmy w poprzednim podrozdziale.

W informacji kwantowej dopuszcza się różne modele lokalnych pomiarów. Można założyć, że każdy z graczy ma swoją przestrzeń Hilberta, a wspólny stan splątany jest określony na iloczynie tensorowym tych przestrzeni; czasem zakłada się też, że te przestrzenie są skończone wymiarowe. W tym wypadku operatory dwóch graczy są postaci $T \otimes \mathbb{1}$ oraz $\mathbb{1} \otimes S$, czyli komutują. Inne podejście jest takie, że mamy wspólną przestrzeń Hilberta i zakładamy jedynie, że operatory obu graczy są ze sobą przemienne. Niedawny spektakularny wynik ([JNV⁺]) pokazuje, że w ogólności podejścia te nie są równoważne, nawet gdy w modelu tensorowym pozwalamy na aproksymację. W szczególnych przypadkach jest więc interesujące sprawdzenie, czy dostajemy te same wartości dla różnych metod. Wynik [H1, Theorem 4.7] mówi, że jeśli algebra $\mathcal{O}(\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1)$ jest niezerowa, to automatycznie posiada niezmienniczy stan, który jest śladem, jeśli przestrzenie kwantowe dla $\mathcal{G}_i = (B_i, \psi_i, A_i)$ są śladowe (w szczególności dla grafów klasycznych). W świetle [HMPs19] można to interpretować w ten sposób, że bardzo słaba wersja kwantowego izomorfizmu automatycznie implikuje, że grafy te są kwantowo izomorficzne w sensie *qc* (ang. *quantum commuting*), czyli w podejściu z komutującymi operatorami.

Później pojawiły się prace dotyczące nielokalnych gier, obejmujące również kwantowe grafy ([BHTT24]), z których można wywieść inną definicję kwantowego izomorfizmu grafów kwantowych, opartą na istnieniu idealnej strategii w grze. Co ciekawe, definicja ta potencjal-

nie różni się od naturalnego rozszerzenia definicji z pracy [MRV18], którą zaprezentowaliśmy w poprzednim podrozdziale ([BHHT24, Theorem 8.9, Theorem 8.14]).

4.8 Kwantowe algebry Cuntza-Kriegera

W tej części opiszę wyniki z artykułu [H3]. W tej pracy stosowana była konwencja, że grafy kwantowe są definiowane przy użyciu δ -form, czyli *stanów* na algebrze B , stąd wynikają drobne różnice między wzorami z tej pracy a tymi, które pojawiają się w tekście poniżej.

Algebra Cuntza O_n to uniwersalna C^* -algebra generowana przez n izometrii na przestrzeni Hilberta, których obrazy są wzajemnie prostopadłe i sumują się do całej przestrzeni. Algebraicznie oznacza to, że mamy n operatorów $S_1, \dots, S_n$ spełniających równości $S_i^* S_i = \mathbb{1}$ oraz $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = \mathbb{1}$. Tę algebrę można również przedstawić jako C^* -**algebrę grafową**, gdzie graf to jeden wierzchołek i n pętli, lub jako **algebrę Cuntza-Kriegera** ([CK80]), korzystając z pojęcia grafu krawędziowego, który w przypadku jednego wierzchołka z n pętlami jest grafem pełnym na n wierzchołkach.

Definicja 4.8.1. Niech $A \in M_n(\{0, 1\})$. Rodziną Cuntza-Kriegera nazwiemy rodzinę częściowych izometrii $S_1, \dots, S_n$ o wzajemnie ortogonalnych obrazach takich, że $S_i^* S_i = \sum_j a_{ij} S_j S_j^*$. Uniwersalną C^* -algebrę generowaną przez takie operatory nazywamy algebrą Cuntza-Kriegera i oznaczamy jako O_A .

Uwaga 4.8.2. Z relacji wynika, że $e := \sum_{j=1}^n S_j S_j^*$ jest jedyneką w O_A . W szczególności dla macierzy A takiej, że $a_{ij} = 1$ dostajemy równości $S_i^* S_i = \mathbb{1}$, zatem operatory S_i są izometriami o wzajemnie ortogonalnych obrazach sumujących się do całej przestrzeni.

W pracy [BEVW22] pojawiło się uogólnienie algebr Cuntza-Kriegera dla grafów kwantowych.

Definicja 4.8.3 ([BEVW22, Definition 3.7]). Niech $\mathcal{G} := (B, \psi, A)$ będzie grafem kwantowym i niech D będzie C^* -algebrą. Literą m oznaczamy mnożenie w B , natomiast μ_D będzie oznaczać mnożenie w D . **Kwantową rodziną Cuntza-Kriegera** w D nazwiemy odwzorowanie liniowe $s : B \rightarrow D$ spełniające warunki

- (i) $\mu_D(\text{Id} \otimes \mu_D)(s \otimes s^* \otimes s)(\text{Id} \otimes m^*)m^* = s;$
- (ii) $\mu_D(s^* \otimes s)m^* = \mu_D(s \otimes s^*)m^* A,$

gdzie $s^*(b) := s(b^*)^*$. Kwantowa algebra Cuntza-Kriegera $\mathbb{FO}(\mathcal{G})$ to uniwersalna C^* -algebra wyposażona w kwantową rodzinę Cuntza-Kriegera.

Uwaga 4.8.4. Pierwszy warunek w tej definicji jest odpowiednikiem faktu, że pracujemy z częściowymi izometriami, natomiast drugi to relacja Cuntza-Kriegera. Brakuje tutaj warunku, że obrazy różnych częściowych izometrii są wzajemnie ortogonalne, co sprawia, że nawet dla klasycznych grafów dostajemy trochę inne obiekty, mianowicie wolne algebry Cuntza-Kriegera. Czasem dodaje się do definicji trzeci warunek (zob. [H3, Definition 3.1]) $\mu_D(s \otimes s^*)m^*(\mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_D$, który jest odpowiednikiem równości $\sum_i S_i S_i^* = \mathbb{1}$.

Te równości można również zapisać w bardziej jawny sposób ([BEVW22, Proposition 3.9]).

W pracy [Pim97] pojawiła się definicja algebr Cuntza-Pimsnera, które buduje się przy użyciu C^* -korespondencji. Również algebry Cuntza-Kriegera można zakodować w ten sposób ([Pim97, Examples (2), strona 193]), dlatego innym naturalnym podejściem do kwantowych algebr Cuntza-Kriegera jest zdefiniowanie odpowiedniej C^* -korespondencji dla grafów kwantowych i rozważenie algebry Cuntza-Pimsnera.

Definicja 4.8.5. Niech $\mathcal{G} := (B, \psi, A)$ będzie grafem kwantowym i niech $\varepsilon_{\mathcal{G}} := (\text{Id} \otimes A)m^*(1) \in B \otimes B$. Niech $E_{\mathcal{G}} := B \cdot \varepsilon_{\mathcal{G}} \cdot B$ będzie B -bimodulem generowanym przez $\varepsilon_{\mathcal{G}}$ wewnątrz $B \otimes B$. Na $E_{\mathcal{G}}$ możemy zdefiniować iloczyn skalarny o wartościach w B za pomocą wzoru $\langle a \otimes b, c \otimes d \rangle := b^* d \psi(a^* c)$ odziedziczony z $B \otimes B$. Tak powstałą C^* -korespondencję nazywamy **kwantową korespondencją krawędziową**.

Z [H3, Corollary 2.6] wynika, że kwantowa korespondencja krawędziowa jest izomorficzna z korespondencją pochodzącą od całkowicie dodatniego odwzorowania $A : B \rightarrow B$ (zob. Przykład 4.4.13).

Korespondencja krawędziowa to kolejny równoważny opis grafów kwantowych. Z [H3, Proposition 2.3, Theorem 2.5] wynika, że $A(x) = (\psi \otimes \text{Id})(x \cdot \varepsilon_{\mathcal{G}}) = \langle \varepsilon_{\mathcal{G}}, x \cdot \varepsilon_{\mathcal{G}} \rangle$, czyli można odzyskać wzór na kwantową macierz sąsiedztwa z C^* -korespondencji.

Definicja 4.8.6. Niech X będzie skończenie wymiarową C^* -korespondencją nad skończenie wymiarową C^* -algebrą B ; zakładamy, że lewe działanie jest **wierne**, czyli równość $b \cdot \xi = 0$ dla wszystkich $\xi \in X$ implikuje $b = 0$. Reprezentacją X na C^* -algebrze D nazywamy parę (π, t) , gdzie $\pi : B \rightarrow D$ jest $*$ -homomorfizmem, natomiast $t : X \rightarrow D$ jest odwzorowaniem liniowym takim, że

- (i) $\pi(b)t(\xi) = t(b \cdot \xi)$ dla wszystkich $b \in B$ i $\xi \in X$;
- (ii) $t(\xi)^* t(\eta) = \pi(\langle \xi, \eta \rangle)$.

Co więcej, definiujemy $*$ -homomorfizm $\psi_t : L_B(X) \rightarrow D$ wzorem $\psi_t(|\xi\rangle\langle\eta|) := t(\xi)t(\eta)^*$. Reprezentacja (π, t) jest **kowariantna**, jeśli $\pi(b) = \psi_t(L_b)$, gdzie $L_b \in L_B(X)$ jest operatorem lewego mnożenia przez b . **Algebra Cuntza-Pimsnera** O_X to uniwersalna C^* -algebra, na której istnieje kowariantna reprezentacja C^* -korespondencji X .

Wierność lewego działania łatwo wyrazić w terminach kwantowej macierzy sąsiedztwa ([H3, Theorem 2.9]): oznacza to tyle, że $\ker(A)$ nie zawiera żadnego składnika z rozkładu B na sumę prostą algebr macierzowych. Przy tym założeniu możemy znaleźć związek algebry Cuntza-Pimsnera kwantowej korespondencji krawędziowej z kwantową algebrą Cuntza-Kriegera.

Twierdzenie 4.8.7 ([H3, Theorem 3.6, Definition 3.4]). *Niech $\mathcal{G} := (B, \psi, A)$ będzie grafem kwantowym. Załóżmy, że $E_{\mathcal{G}}$ jest wierną korespondencją. Wtedy C^* -algebra $O_{E_{\mathcal{G}}}$ jest izomorficzna z uniwersalną C^* -algebrą generowaną przez **lokalną kwantową rodzinę Cuntza-Kriegera**, czyli odwzorowanie liniowe $s : B \rightarrow D$ spełniające*

- (i) $\mu_D(\text{Id} \otimes \mu_D)(s \otimes s^* \otimes s)(\text{Id} \otimes m^*) = sm$;

- (ii) $\mu_D(s^* \otimes s) = \mu_D(s \otimes s^*)m^*Am;$
- (iii) $\mu_D(s \otimes s^*)m^*(1_B) = 1_D.$

Taką C^* -algebrę nazywamy lokalną kwantową algebrą Cuntza-Kriegera.

Uwaga 4.8.8. Trzecia równość jest taka sama jak w przypadku kwantowych algebr Cuntza-Kriegera. Z pierwszych dwóch warunków z powyższego twierdzenia wynikają warunki z Definicji 4.8.3, wystarczy do obu stron przyłożyć m^* i skorzystać z równości $mm^* = \text{Id}$.

Pewną przewagą tej konstrukcji nad kwantowymi algebrami Cuntza-Kriegera jest to, że łatwiej zrozumieć strukturę ich lokalnej wersji. Na przykład [H3, Proposition 4.1] mówi, że dla dowolnego kwantowego grafu pełnego $\mathcal{G}$ $O_{E_{\mathcal{G}}}$ jest izomorficzna z algebrą Cuntza $O_{\dim(B)}$, co dla kwantowych algebr Cuntza-Kriegera wiadomo tylko przy dodatkowym założeniu, że $\psi(1)$ jest liczbą naturalną ([BEVW22, Theorem 4.5]). W pracy [H3] zostały również opisane lokalne kwantowe algebry Cuntza-Kriegera w następujących przypadkach ([H3, Corollary 4.5, Proposition 4.10, Corollary 4.13]):

- (i) Gdy $A = \text{Id}$ (graf trywialny), to $O_{E_{\mathcal{G}}} \simeq B \otimes C(\mathbb{T})$;
- (ii) Gdy $Ax := TxT^*$ dla pewnego $T \in B$, to $O_{E_{\mathcal{G}}} \simeq B' \otimes C(\mathbb{T})$, gdzie B' jest sumą prostą tych bloków macierzowych, dla których składowa T jest niezerowa;
- (iii) Gdy A jest $*$ -automorfizmem B , to $O_{E_{\mathcal{G}}} \simeq B \rtimes \mathbb{Z}$.

Dla klasycznych grafów istnieje jeszcze jeden bardzo przydatny opis algebr Cuntza-Kriegera za pomocą iloczynów krzyżowych ([Exe03]). Z każdym grafem stowarzyszony jest topologiczny układ dynamiczny, tak zwane **przesunięcie skończonego typu**: przestrzenią topologiczną jest zbiór nieskończonych ścieżek w grafie i na tej przestrzeni działa półgrupa $\mathbb{N}$ przez przesunięcia. Fakt, że $\mathbb{N}$ jest tylko półgrupą trochę utrudnia konstrukcję iloczynów krzyżowych, ale teorię w tym przypadku bardzo precyzyjnie opisał Exel ([Exe03]). W przypadku grafów kwantowych dotychczas nie ma dobrego kandydata na przestrzeń ścieżek, jednak w niektórych przypadkach da się to zrobić i wówczas algebry $O_{E_{\mathcal{G}}}$ można przedstawić jako iloczyny krzyżowe Exela. Ma to miejsce dla grafów pełnych ([H3, Theorem 4.3]), grafów trywialnych ([H3, Proposition 4.6]) oraz dla $*$ -automorfizmów, gdzie naturalne działanie jest odwracalne, więc pojawia się produkt krzyżowy przez $\mathbb{Z}$.

W preprincie [KW] scharakteryzowaliśmy stany KMS w sposób podobny do tego, jak to się robi dla algebr Cuntza-Kriegera, gdzie są one związane z dodatnimi wektorami własnymi macierzy sąsiedztwa.

4.9 Pozostałe wyniki

W tej części pokrótce opiszę wyniki z osiągnięcia habilitacyjnego, które nie do końca wpisywały się w tematykę autoreferatu, ponieważ dotyczą grafów klasycznych.

W [H1, Corollary 4.15] udowodniliśmy, że graf Fruchta, pewien 3-regularny graf o 12 wierzchołkach, ma trywialną kwantową grupę automorfizmów. Korzystając z pracy [GM82]

można przy jego użyciu skonstruować dwa grafy izospektralne (czyli macierze sąsiedztwa mają takie samo spektrum) o trywialnych kwantowych grupach automorfizmów, które nie są kwantowo izomorficzne. To dało odpowiedź na pytanie postawione w pracy [LMR20]: czy istnienie izomorfizmu kwantowych algebr orbitalnych utożsamiającego macierze sąsiedztwa prowadzi do istnienia kwantowego izomorfizmu grafów? W naszym przypadku kwantowe grupy automorfizmów są trywialne, co oznacza, że kwantowe algebry orbitalne są pełnymi algebrami macierzowymi. Z kolei izospektralność oznacza, że jedna macierz sąsiedztwa może być uzyskana z drugiej za pomocą sprzęgania przez pewną macierz unitarną. Takie sprzęganie zadaje automorfizm algebry macierzowej, który przeprowadza jedną z macierzy sąsiedztwa na drugą, mimo że grafy te nie są kwantowo izomorficzne.

W [H2, Theorem 2.5] znaleźliśmy nowy dowód twierdzenia z [LMR20], że prawie wszystkie grafy z modelu $G(n, p)$ mają trywialną kwantową grupę automorfizmów; tam głównym narzędziem były koherentne konfiguracje, natomiast my badaliśmy spektrum macierzy sąsiedztwa i wykorzystywaliśmy wyniki z teorii macierzy losowych. Co więcej, udowodniliśmy też, że losowe *regularne* grafy prawie na pewno mają trywialną grupę automorfizmów ([H2, Theorem 2.6]).

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

W 2014 roku rozpocząłem studia doktoranckie w **Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk**. Pierwsze trzy miesiące, od października do grudnia, spędziłem na **Université de Franche-Comté** w Besançon, gdzie brałem udział w trymestrze „Geometric and noncommutative methods in functional analysis”; osobą zapraszającą był Uwe Franz. Pozwoliło mi to na udział w czterech konferencjach i dwóch szkołach oraz na poznanie wielu znakomitych matematyków, takich jak Marius Junge czy Fedor Sukochev.

W roku 2015 dwa miesiące, październik i listopad, spędziłem na **Texas A&M University** w College Station na zaproszenie Gilles’a Pisiera. Podczas tej wizyty nie tylko bardzo poszerzyłem swoją wiedzę, ale również nawiązałem współpracę z Michaeliem Brannanem, która wtedy zaowocowała pracą [ABW18] i trwa do dziś. Od lutego do kwietnia 2018 byłem na trzymiesięcznym stażu na Texas A&M University w ramach stypendium NCN Etiuda, gdzie tym razem moim gospodarzem był Michael Brannan. Po tym pobycie napisaliśmy pracę [H1], która zapoczątkowała moje zainteresowanie teorią grafów kwantowych.

Od października 2018 roku byłem postdokiem na **KU Leuven**, gdzie moim opiekunem był Stefaan Vaes. W roku 2019 zdobyłem prestiżowy grant FWO i od października 2019 roku do grudnia 2021 roku kontynuowałem pracę na KU Leuven. W tym okresie dużo współpracowałem z Martijnem Caspersem z **TU Delft**, co zaowocowało pracami [CIW21], [BCKW23], [CKS+23], [BCW24].

Wygłosiłem również wiele wykładów na konferencjach: w Będlewie (3 razy), Leeds, Leuven, Waco, Lejdzie, Saarbrücken, Oberwolfach, Oslo, Sztokholmie, Łodzi, Delft i Cambridge oraz na czterech konferencjach online (między innymi na sekcji Europejskiego Kongresu Matematycznego w 2021).

Byłem również zapraszany na seminaria (poza swoją jednostką): we Wrocławiu (3 razy), Glasgow (2 razy), College Station (2 razy), Leuven (2 razy), Kopenhadze (2 razy), Paryżu (na dwóch różnych uczelniach), Houston, Caen, Brukseli, Delft. Wygłosiłem też referaty na kilku seminariach online.

W marcu 2024 wygłosiłem na Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego cykl trzech wykładów na temat grafów kwantowych, natomiast w listopadzie 2024 roku cztery wykłady o grupach kwantowych na szkole w Cambridge.

Moja aktywność międzynarodowa obejmuje również współpracę z wieloma osobami – mam szesnaścioro różnych współautorów z zagranicy.

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

Jako doktorant prowadziłem ćwiczenia na Uniwersytecie Warszawskim: Matematyka A na Wydziale Chemii (2 semestry), Analiza Funkcjonalna II. Jako student prowadziłem zajęcia wyrównawcze z analizy matematycznej oraz algebry liniowej.

Na KU Leuven prowadziłem wykłady: Probability & Measure (Prawdopodobieństwo i miara), Functional Analysis (Analiza funkcjonalna, 3 razy).

Na KU Leuven opiekowałem się jednym magistrantem, Lukaszem Rollierem, który później ukończył doktorat pod opieką Stefaana Vaesa (byłem członkiem komisji egzaminacyjnej na jego obronie).

Obecnie jestem promotorem pomocniczym Igora Chełstowskiego na Wydziale Fizyki UW, którego promotorem jest dr hab. Paweł Kasprzak.

Podczas doktoratu organizowałem w Instytucie Matematycznym PAN grupę roboczą „Rigidity of group actions” (Sztywność działań grup) na temat teorii deformacji/sztywności Popy. Podczas stażu podoktorskiego na KU Leuven byłem przez 3 lata jednym z organizatorów „Junior Seminar in Pure Mathematics”. W Instytucie Matematycznym PAN organizowałem z prof. Adamem Skalskim grupę roboczą o grafach kwantowych i C^* -kategoriach tensorowych. Od października 2023 roku jestem współorganizatorem Kolokwium IMPAN, seminarium dedykowanego matematykom wszystkich specjalności.

We wrześniu 2023 roku współorganizowałem sekcję na temat algebr operatorów podczas zjazdu Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Obecnie współorganizuję konferencję „Operator Algebraic Quantum Groups”, która ma się odbyć w Banff w Kanadzie między 30 listopada a 5 grudnia 2025 roku.

7 Inne informacje

Jestem laureatem następujących nagród:

- (i) 2. nagroda w konkursie im. Józefa Marcinkiewicza na najlepszą studencką pracę z matematyki (2015);
- (ii) Nagroda Polskiego Towarzystwa Matematycznego dla młodych matematyków (2018);
- (iii) Nagroda im. Kazimierza Kuratowskiego (2020).

Byłem/jestem kierownikiem następujących grantów:

- (i) Grant NCN Preludium *Własności aproksymacji i kontraktywność półgrup Markowa dla algebr von Neumanna typu III* (2017–2019);
- (ii) Stypendium NCN Etiuda *Własności aproksymacji q -zdeformowanych algebr Arakiego-Woodsa* (2017–2018);
- (iii) Grant FWO (Fundacja Badawcza we Flandrii) *Junior Postdoctoral Fellowship* (2019–2022);
- (iv) Grant NAWA Polskie Powroty *Grafy kwantowe i ich symetrie* (od 2022);
- (v) Grant NCN Sonata *Grafy kwantowe i ich symetrie* (od 2022).

Obecnie zasiadam w jury konkursu im. Kazimierza Kuratowskiego.

- [ABW18] Stephen Avsec, Michael Brannan, and Mateusz Wasilewski. Complete metric approximation property for q -Araki-Woods algebras. *J. Funct. Anal.*, 274(2):544–572, 2018.
- [AMR⁺19] Albert Atserias, Laura Mančinska, David E. Roberson, Robert Šámal, Simone Severini, and Antonios Varvitsiotis. Quantum and non-signalling graph isomorphisms. *J. Combin. Theory Ser. B*, 136:289–328, 2019.
- [Ban05] Teodor Banica. Quantum automorphism groups of homogeneous graphs. *J. Funct. Anal.*, 224(2):243–280, 2005.
- [BCKW23] Matthijs Borst, Martijn Caspers, Mario Klisse, and Mateusz Wasilewski. On the isomorphism class of q -Gaussian C^* -algebras for infinite variables. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 151(2):737–744, 2023.
- [BCW24] Matthijs Borst, Martijn Caspers, and Mateusz Wasilewski. Bimodule coefficients, Riesz transforms on Coxeter groups and strong solidity. *Groups Geom. Dyn.*, 18(2):501–549, 2024.

- [BDRV06] Julien Bichon, An De Rijdt, and Stefaan Vaes. Ergodic coactions with large multiplicity and monoidal equivalence of quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 262(3):703–728, 2006.
- [BEVW22] Michael Brannan, Kari Eifler, Christian Voigt, and Moritz Weber. Quantum Cuntz-Krieger algebras. *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B*, 9:782–826, 2022.
- [BGH22] Michael Brannan, Priyanga Ganesan, and Samuel J. Harris. The quantum-to-classical graph homomorphism game. *J. Math. Phys.*, 63(11):Paper No. 112204, 34, 2022.
- [BGM⁺] Michael Brannan, Daniel Gromada, Junichiro Matsuda, Adam Skalski, and Mateusz Wasilewski. Frucht theorem for finite quantum groups. *in preparation*.
- [BHTT23] Michael Brannan, Samuel J. Harris, Ivan G. Todorov, and Lyudmila Turowska. Synchronicity for quantum non-local games. *J. Funct. Anal.*, 284(2):Paper No. 109738, 54, 2023.
- [BHTT24] Michael Brannan, Samuel J. Harris, Ivan G. Todorov, and Lyudmila Turowska. Quantum no-signalling bicorrelations. *Adv. Math.*, 449:Paper No. 109732, 81, 2024.
- [BK23] Arkadiusz Bochniak and Paweł Kasprzak. Quantum Mycielski Graphs. *arXiv:2306.09994*, 2023.
- [BLM04] David P. Blecher and Christian Le Merdy. *Operator algebras and their modules—an operator space approach*, volume 30 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2004. Oxford Science Publications.
- [BTW21] G. Boreland, I. G. Todorov, and A. Winter. Sandwich theorems and capacity bounds for non-commutative graphs. *J. Combin. Theory Ser. A*, 177:Paper No. 105302, 39, 2021.
- [BTW22] Gareth Boreland, Ivan G. Todorov, and Andreas Winter. Information theoretic parameters of noncommutative graphs and convex corners. *Illinois J. Math.*, 66(2):123–187, 2022.
- [CDS21] Javier Alejandro Chávez-Domínguez and Andrew T. Swift. Connectivity for quantum graphs. *Linear Algebra Appl.*, 608:37–53, 2021.
- [CIW21] Martijn Caspers, Yusuke Isono, and Mateusz Wasilewski. L_2 -cohomology, derivations, and quantum Markov semi-groups on q -Gaussian algebras. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (9):6405–6441, 2021.
- [CK80] Joachim Cuntz and Wolfgang Krieger. A class of C^* -algebras and topological Markov chains. *Invent. Math.*, 56(3):251–268, 1980.

- [CKS⁺23] Martijn Caspers, Mario Klisse, Adam Skalski, Gerrit Vos, and Mateusz Wasilewski. Relative Haagerup property for arbitrary von Neumann algebras. *Adv. Math.*, 421:Paper No. 109017, 61, 2023.
- [CM23] Eric Culf and Arthur Mehta. New approaches to complexity via quantum graphs. *arXiv:2309.12887*, 2023.
- [Daw24] Matthew Daws. Quantum graphs: different perspectives, homomorphisms and quantum automorphisms. *Commun. Am. Math. Soc.*, 4:117–181, 2024.
- [DSW13] Runyao Duan, Simone Severini, and Andreas Winter. Zero-error communication via quantum channels, noncommutative graphs, and a quantum Lovász number. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 59(2):1164–1174, 2013.
- [Dua09] Runyao Duan. Super-Activation of Zero-Error Capacity of Noisy Quantum Channels, 2009. *arXiv:0906.2547*.
- [EKS98] J. A. Erdos, A. Katavolos, and V. S. Shulman. Rank one subspaces of bimodules over maximal abelian selfadjoint algebras. *J. Funct. Anal.*, 157(2):554–587, 1998.
- [Exe03] Ruy Exel. A new look at the crossed-product of a C^* -algebra by an endomorphism. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(6):1733–1750, 2003.
- [FK98] Michael Frank and Eberhard Kirchberg. On conditional expectations of finite index. *J. Operator Theory*, 40(1):87–111, 1998.
- [Gan23] Priyanga Ganesan. Spectral bounds for the quantum chromatic number of quantum graphs. *Linear Algebra Appl.*, 674:351–376, 2023.
- [GM82] C. D. Godsil and B. D. McKay. Constructing cospectral graphs. *Aequationes Math.*, 25(2-3):257–268, 1982.
- [Gro22] Daniel Gromada. Some examples of quantum graphs. *Lett. Math. Phys.*, 112(6):Paper No. 122, 49, 2022.
- [Haa79] Uffe Haagerup. Operator-valued weights in von Neumann algebras. II. *J. Functional Analysis*, 33(3):339–361, 1979.
- [HMPS19] J. William Helton, Kyle P. Meyer, Vern I. Paulsen, and Matthew Satriano. Algebras, synchronous games, and chromatic numbers of graphs. *New York J. Math.*, 25:328–361, 2019.
- [JNV⁺] Zhengfeng Ji, Anand Natarajan, Thomas Vidick, John Wright, and Henry Yuen. $MIP^*=RE$. *arXiv:2001.04383*.
- [KM19] Se-Jin Kim and Arthur Mehta. Chromatic numbers, Sabidussi’s theorem and Hedetniemi’s conjecture for non-commutative graphs. *Linear Algebra Appl.*, 582:291–309, 2019.

- [Kos98] Hideki Kosaki. *Type III factors and index theory*, volume 43 of *Lecture Notes Series*. Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1998.
- [KW] Manish Kumar and Mateusz Wasilewski. KMS states on quantum Cuntz-Krieger algebras. *arXiv:2412.07410*.
- [KW12] Greg Kuperberg and Nik Weaver. A von Neumann algebra approach to quantum metrics. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 215(1010):v, 1–80, 2012.
- [Kye08] David Kyed. L^2 -Betti numbers of coamenable quantum groups. *Münster J. Math.*, 1:143–179, 2008.
- [LMR20] Martino Lupini, Laura Mančinska, and David E. Roberson. Nonlocal games and quantum permutation groups. *J. Funct. Anal.*, 279(5):108592, 44, 2020.
- [Mat22] Junichiro Matsuda. Classification of quantum graphs on M_2 and their quantum automorphism groups. *J. Math. Phys.*, 63(9):Paper No. 092201, 34, 2022.
- [Mat24] Junichiro Matsuda. Algebraic connectedness and bipartiteness of quantum graphs. *Comm. Math. Phys.*, 405(8):Paper No. 185, 28, 2024.
- [MRV18] Benjamin Musto, David Reutter, and Dominic Verdon. A compositional approach to quantum functions. *J. Math. Phys.*, 59(8):081706, 42, 2018.
- [MRV19] Benjamin Musto, David Reutter, and Dominic Verdon. The Morita theory of quantum graph isomorphisms. *Comm. Math. Phys.*, 365(2):797–845, 2019.
- [NT13] Sergey Neshveyev and Lars Tuset. *Compact quantum groups and their representation categories*, volume 20 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2013.
- [OP15] Carlos M. Ortiz and Vern I. Paulsen. Lovász theta type norms and operator systems. *Linear Algebra Appl.*, 477:128–147, 2015.
- [OP16] Carlos M. Ortiz and Vern I. Paulsen. Quantum graph homomorphisms via operator systems. *Linear Algebra Appl.*, 497:23–43, 2016.
- [Pas73] William L. Paschke. Inner product modules over B^* -algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 182:443–468, 1973.
- [Pim97] Michael V. Pimsner. A class of C^* -algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbf{Z}$. In *Free probability theory (Waterloo, ON, 1995)*, volume 12 of *Fields Inst. Commun.*, pages 189–212. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [PP86] Mihai Pimsner and Sorin Popa. Entropy and index for subfactors. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(1):57–106, 1986.

- [Smi91] R. R. Smith. Completely bounded module maps and the Haagerup tensor product. *J. Funct. Anal.*, 102(1):156–175, 1991.
- [Sta16] Dan Stahlke. Quantum zero-error source-channel coding and non-commutative graph theory. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 62(1):554–577, 2016.
- [VD96] A. Van Daele. Discrete quantum groups. *J. Algebra*, 180(2):431–444, 1996.
- [Wan98] Shuzhou Wang. Quantum symmetry groups of finite spaces. *Comm. Math. Phys.*, 195(1):195–211, 1998.
- [Wea12] Nik Weaver. Quantum relations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 215(1010):v–vi, 81–140, 2012.
- [Wea21] Nik Weaver. Quantum graphs as quantum relations. *J. Geom. Anal.*, 31(9):9090–9112, 2021.
- [Wor87a] S. L. Woronowicz. Compact matrix pseudogroups. *Comm. Math. Phys.*, 111(4):613–665, 1987.
- [Wor87b] S. L. Woronowicz. Twisted $SU(2)$ group. An example of a noncommutative differential calculus. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 23(1):117–181, 1987.
- [Wor88] S. L. Woronowicz. Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups. *Invent. Math.*, 93(1):35–76, 1988.