Prof. dr hab. Krzysztof Frączek
Wydział Matematyki i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 8 kwietnia 2015

Recenzja rozprawy doktorskiej
Własności ergodyczne gładkich potoków na powierzchniach
mgr Adama Kanigowskiego

Wstęp. Motywem przewodnim recenzowanej rozprawy doktorskiej jest tzw. własności Ratner dla zachowujących miarę układów dynamicznych. Jest to własność, która, mówiąc mało formalnie, opisuje ilościowo zjawisko przesuwania się w czasie trajektorii układu (w odległym horyzoncie czasowym) startujących z bliskich punktów znajdujących się w zbiorze o dopełnieniu małej miary. To bardzo ważne zjawisko zostało zauważone na początku lat 80-tych ubiegłego wieku przez Marinę Ratner dla tzw. potoków horocykli na zwartych powierzchniach o stałej ujemnej krzywiźnie i pełniło kluczową rolę w dowodzie twierdzeń „o sztywności" dla tych potoków. Następnie własność Ratner zagrała istotną rolę w dowodach klasyfikujących domknięcia orbit oraz miary niezmiennicze dla unipotentnych potoków na przestrzeniach jednorodnych. Są to twierdzenia, które do tej pory wywołują zachwyt i są nadal istotnie wykorzystywane w zastosowaniach teorii ergodycznej do problemów teorią liczb.

Jedną z fundamentalnych konsekwencji dla ergodycznego układu dynamicznego spełniającego własność Ratner jest relatywnie prosty opis połączeń ergodycznych układu z innymi (zewnętrznymi) układami ergodycznymi. Otóż, każde takie połączenie ergodyczne jest miarą na produkcie przestrzeni, która ma skończone włókna nad przestrzenią układu zewnętrznego (własność zwana FEJ w rozprawie). Oprócz wcześniej wspomnianych konsekwencji własność FEJ ma również inne istotne zastosowania. Jedno z nich łączy się z tzw. problemem Rochlina: czy mieszanie układu dynamicznego implikuje jego mieszanie wszystkich rzędów (wielokrotne). Jest to odpowiednik pytania: czy niezależność parami rodziny zmiennych losowych implikuje niezależność całej rodziny, na które odpowiedź jest oczywiście przecząca. Problem Rochlina jest znacznie bardziej skomplikowany i pozostaje cały czas otwarty. Istnieje wiele częściowych pozytywnych odpowiedzi, w których wielokrotnego mieszania dowodzi się przy pewnych dodatkowych na układ dynamiczny takich, jak osobliwe widmo, czy skończona ranga. Taką własnością jest również FEJ.

Inną ciekawą konsekwencją FEJ jest twierdzenie mówiące, że słabo mieszający układ z własnością FEJ, który nie jest częściowo sztywny jest łagodnie mieszający. Rezultat ten jest jedną z nielicznych dróg dowodzenia łagodnego mieszania dla układów, które nie są mieszające.

Oprócz wspomnianych wcześniej potoków pochodzenia algebraicznego, własność Ratner (tym razem zmodyfikowaną) posiadają również pewne potoki specjalne zbudowane nad obrotami ergodycznymi. W pracach Frączka-Lemańczyka (2006-10) wprowadzono pojęcie skończonej własności Ratner oraz jej uogólnienie zwane w rozprawie *słabą własnością Ratner*, obie własności implikują FEJ. Własność ta została użyta tym razem do udowodnienia łagodnego mieszania m.in. dla potoków von Neumann, są to potoki specjalne zbudowana nad obrotami niewymiernymi na okręgu i pod funkcjami dachowymi, które są kawałkami absolutnie ciągłe z niezerową sumą skoków. A dokładniej mówiąc skończona własność Ratner została udowodniona dla potoków nad obrotami o liczby z ograniczonymi częściowymi ilorazami w rozwinięciu na ułamek łańcuchowy. Potoki von Neumanna pojawiają się w naturalny sposób jako reprezentacje specjalne potoków na wypunktowanych dwuwymiarowych powierzchniach (powstałych po wyrzuceniu ze zwartej powierzchni skończenie wielu punktów).

Dokonania zaprezentowane w rozprawie są, w pewnym sensie, kontynuacją koncepcji rozwiniętych w pracach Frączka-Lemańczyka. Należy jednak nadmienić, że zarówno pod względem jakości wypracowanych technik, jak i wartości naukowej osiągniętych rezultatów przewyższają one dalece osiągnięcia protoplastów.

Omówienie rezultatów. Pierwsze dwa rozdziały rozprawy zawierają dobrze napisany wstęp i materiał wprowadzający.

Rozdział 3 zawiera pierwsze istotne wyniki. Autor rozpatruje w nim potoki specjalne nad niewymiernymi obrotami na okręgu i pod funkcjami o wahaniu ograniczonym. A dokładniej, obroty mają ograniczone częściowe ilorazy oraz funkcja dachowa w rozkładzie Lebesgue'a na część absolutnie ciągłą, skokową i singularną, nie posiada części singularnej. Główny rezultat tego rozdziału stanowi, że jeśli taka funkcja dachowa ma niezerową sumę skoków (z dodatkowymi założeniami na skoki) to potok specjalny spełnia słabą własność Ratner oraz jest łagodnie mieszający. Jest to istotne i eleganckie uogólnienie wcześniej wspomnianego rezultatu Frączka-Lemańczyka dotyczącego potoków von Neumanna.

Rezultaty następnych rozdziałów dotyczą potoków specjalnych pochodzących od gładkich potoków zachowujących gładkie miary na zwartych orientowalnych powierzchniach. Jeśli genus powierzchni jest większy niż 1, to potok taki musi posiadać punkty stałe. Ten fakt wpływa istotnie na kształt funkcji dachowej - musi ona posiadać osobliwości. Przypomnijmy, że automorfizm bazowy jest obrotem na okręgu lub przekładaniem odcinków. W przypadku pewnego niezdegenorowania punktów stałych, Koczergin w latach 70-tych ubiegłego wieku pokazał, że osobliwości muszą mieć w przybliżeniu kształt logarytmiczny. Ponadto pokazał on, że w tzw. przypadku symetrycznym potok specjalny nie jest mieszający, gdy w podstawie potoku specjalnego jest obrót. Niedawno Ulcigrai rozszerzyła ten rezultat dowodząc, że dla prawie każdego przekładania odcinków potok specjalny pod funkcją dachową z logarytmicznymi osobliwościami symetrycznego typu nie jest mieszający ale jest on słabo mieszający. Pozostaje otwartym pytanie, czy takie potoki są łagodnie mieszające. Na to pytanie otrzymujemy częściową odpowiedź w rozdziale 7 rozprawy.

Kompletnie inne własności dynamiczne posiadają potoki specjalne pod funkcją z logarytmicznymi osobliwościami typu asymetrycznego, które po raz pierwszy były rozpatrywane przez Arnolda, dlatego też autor rozprawy nazywa je potokami Arnolda. Badaniem własności dynamicznych tego typu potoków zajmowało wielu znamienitych matematyków: Sinaj, Khanin, Koczergin, Ulcigrai, którzy przy różnych dodatkowych założeniach dowodzili mieszania potoków Arnolda. Jednak metody przez nich stosowane nie dawały możliwości rozstrzygnięcia, czy potok jest również mieszający wszystkich rzędów. Dopiero podejście Kanigowskiego i Fayada, zaprezentowane w rozdziale 6 dało pozytywne rozwiązanie tego wieloletniego problemu. Wypracowana metoda działa równiej w innej klasie potoków specjalnych nad obrotami, które pochodzą od potoków na powierzchniach w przypadku, gdy punkty stałe są w pewnym sensie zdegenerowane. Koczergin już w latach 70-tych ubiegłego wieku zauważył, że przy pewnym typie zdegenerowania, funkcja dachowa ma osobliwości typu potęgowego. Takie potoki specjalne są nazywane przez autora rozprawy potokami Koczergina. Koczergin przy pewnych założeniach na obrót w bazie udowodnił mieszanie tych potoków i przez wiele lat pozostawało otwartym pytanie o ich wielokrotne mieszanie. Dopiero praca Kanigowskiego i Fayada rozstrzygnęła pozytywnie ten problem dla pewnej klasy obrotów. Powinienem podkreślić, że rozwiązania obu problemów stanowią ogromny postęp w teorii ergodycznej, co potwierdza fakt, że artykuł zawierający te rezultaty został niedawno zaakceptowany do publikacji w prestiżowym czasopiśmie Inventiones Mathematicae.

Jak już wspominałem we wstępnej części recenzji jedną z metod dowodzenia wielokrotnego mieszania dla układów mieszających jest pokazanie, że układ spełnia własność typu Ratner, a dokładniej FEJ. Dotychczas przedstawione własności typu Ratner brały pod uwagę tylko dodatnie półorbity. Wówczas jeśli funkcja dachowa ma punkt osobliwy i rozpatrujemy dodatnie półorbity startujące z bliskich punktów, to dość szybko punkt osobliwy może znaleźć się pomiędzy nimi, co nie daje możliwości dalszej kontroli względnego położenia orbit między sobą. A. Kanigowski w rozdziale 4 pokazał, że za tą skromną intuicją stoi dużo głębsze zjawisko. Udowodnił, że pewne potoki Koczergina nie spełniają słabej własności Ratner (Twierdzenie 1.6). Oprócz konsekwencji natury „filozoficznej" rezultat ten pociąga bardzo interesujące konkretne wnioski. Po pierwsze pokazuje, że taki potok specjalny nie jest izomorficzny z potokiem horocykli oraz zbudowane w dowodzie techniki dają narzędzie (jak pisze autor rozprawy) do wyznaczania tzw. wolnej entropii potoków specjalnych nad obrotami (ich klasyczna entropia wynosi zero). Z kolei, wolna entropia jako niezmiennik izomorfizmu daje możliwość rozróżniania pomiędzy układami o zerowej entropii, to brzmi szalenie obiecująco. Wypracowane w rozdziale 4 metody są absolutnie nowatorskie. Oryginalność podejścia autora do problemu braku własności Ratner jest dla mnie doprawdy imponująca.

Jeszcze bardzie imponujące są rezultaty kolejnych dwóch rozdziałów. W rozdziale 5, widząc problemy jakie występują przy badaniach dotychczasowych własności typu Ratner, autor proponuje nową własność zwaną *przełącznikową własność Ratner* (SWR). Zamiast, jak dotychczas, badać przesunięcia w czasie półorbit dodatnich autor zaprzęga również ich ujemne części. Pomysł, na pozór prosty, ma daleko idące konsekwencje. Otóż patrząc na orbity bliskich punktów, okazuje się, że na wystarczająco długim odcinku czasu pomiędzy ich półorbitami w przód lub w tył nie znajdziemy punktu osobliwego. Ponadto, obie półorbity podchodzą pod punkt osobliwy z tej samej strony, co z kolei daje daje możliwość dowodzenia przemieszczania się w czasie fragmentów półorbit względem siebie. Ta obserwacja stała się, jak mniemam, podstawą dowodu twierdzenia 6.2. Przedstawione powyżej rozumowanie intuicyjne zostało przekute w doprawdy imponujący i zaawansowany technicznie dowód. Najistotniejszymi konsekwencjami twierdzenia 6.2 jest własność SWR dla pewnych bogatych (nie będę wchodził w szczegóły) klas zarówno potoków Arnolda, jak i Koczergina. To z kolei implikuje wielokrotne mieszanie wspomnianych potoków (twierdzenia 1.1 i 1.2) i rozstrzyga otwarte przez wiele lat problemy.

W rozdziale 7 rozpatrywane są potoki specjalne nad przekładaniami odcinków i pod funkcjami z logarytmicznymi osobliwościami symetrycznego typu. Jak wspomniałem wcześniej Ulcigrai pokazała, że dla typowego przekładani odcinków potoki te są słabo mieszające ale nie mieszające. W rozprawie brane są pod uwagę tylko przekładania odcinków ograniczonego typu, jest to naturalny odpowiednik obrotów o liczby niewymierne z ograniczonymi częściowymi ilorazami w ułamku łańcuchowym. Korzystając z technik wypracowanych przez Ulcigrai w rozdziale 7 pokazano SWR dla wspomnianych potoków, ogólna idea użyta w dowodzie naśladuje tą z rozdziału 6. Własność SWR (implikująca FEJ) wraz z brakiem częściowej sztywności, udowodnionym przez Kułagę, daję łagodne mieszanie potoku specjalnego. W konsekwencji otrzymujemy naturalne przykłady gładkich potoków na powierzchniach zwartych, które są łagodnie mieszające i nie są mieszające.

Ocena rozprawy. Jako najbardziej wartościowe części rozprawy oceniam samo wprowadzenie własności SWR oraz rezultaty zawarte w rozdziałach 4, 6 i 7. Własność SWR jest jak magiczna różdżka, za pomocą której znikają problemy związane z wcześniejszymi pojęciami typu własności Ratner. Nie jest to tak, że wszystko staje sie nagle łatwe. Aby udowodnić wszystkie wspomniane rezultaty rozprawy A. Kanigowski stworzył niezwykle nowatorski i oryginalny aparat, który jest dodatkowo skomplikowany technicznie. Przy czym sformułowania „nowatorski i oryginalny" nie używam tu jak to zwykle formułuje się w recenzjach rozpraw doktorskich, tzn. na poziomie rozpraw doktorskich. Nowatorstwo i oryginalność należy rozumieć bezwzględnie. Ponadto sądzę, że wypracowany aparat, jak i rezultaty rozprawy będą miały istotny wpływ na rozwój teorii ergodycznej potoków specjalnych nad obrotami i przekładaniami odcinków. A. Kanigowski już współpracuje z najlepszymi światowej sławy specjalistami z układów dynamicznych tzn. B. Fayadem, G. Fornim i C. Ulcigrai, co dodatkowo dobrze wróży rozwojowi tematyki.

Podsumowanie. W moim przekonaniu rozprawa mgr. Adama Kanigowskiego pt. „Własności ergodyczne gładkich potoków na powierzchniach" spełnia z ogromnym nadmiarem ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Uzyskane przez A. Kanigowskiego wyniki świadczą o jego ogromnym talencie, bardzo dobrej intuicji matematycznej oraz umiejętności przekucia intuicji w rezultaty matematyczne plasujące się na najwyższym poziomie światowym.

W związku z tym przedkładam Radzie Naukowej Instytutu Matematycznego PAN wniosek o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie mgr. A. Kanigowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto składam wniosek o **wyróżnienie** rozprawy.

Krzysztof Frączek