On group actions on Banach spaces and generalised property (T)
rozprawa doktorska
streszczenie

Alan Czuroń

Praca składa się z dwóch części. W pierwszej części zajmujemy się własnością (T) Kazhdana oraz jej uogólnieniem. W drugiej części rozważamy lokalną reprezentowalność układów charakterów na różnych grupach Vilenkina.

Pierwsza część składa się z dwóch rozdziałów. W pierwszym rozdziale definiujemy własność Kazhdana oraz omawiamy jej równoważne definicje oraz zastosowania w innych dziedzinach matematyki. Okazuje się, że własność Kazhdana jest równoważna tak zwanej własności FH.

Definicja 1. *Mówimy, że loklanie zwarta, σ-zwarta grupa G ma własność FH jeżeli każde działanie tej grupy na przestrzeni Hilberta H poprzez afiniczne izometrie ma punkt stały.*

Zatem uogólnienie własności FH możemy traktować jako uogólnienie własności (T). Dla danej przestrzeni Banacha X uogólnienie to nazywamy FX i brzmi ono następująco.

Definicja 2. *Niech X będzie przestrzenią Banacha. Mówimy, że lokalnie zwarta, σ-zwarta grupa G ma własność FX jeżeli każde działania G na X poprzez afiniczne izometrie ma punkt stały.*

Aby zrozumieć jakie są relacje między własnościami FX i FY dla różnych przestrzeni Banacha X, Y naturalnym wydaje się następujące pytanie.

Question 1. *Niech $L_p(\Omega, \mu)$ oznacza przestrzeń Lebesgue'a dla $1 \leq p < \infty$. Załóżmy, że grupa G ma własność FL_p dla pewnego $p > 1$. Czy implikuje to własność FL_q dla $q < p$?*

W rozdziale drugim podajemy dowód tego faktu w przypadku ciągowych przestrzeni ℓ_p. W dowodzie korzystamy z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. *(Banach-Lamperti) Niech $p \in (1, \infty) - 2$. Dowolna liniowa izometria $T : L_p(\Omega, \mu) \to L_p(\Omega, \mu)$ jest postaci*

$$Tf(x) = f(U(x))h(x)\left(\frac{dU_*\mu}{d\mu}\right)^{\frac{1}{p}}$$

gdzie U jest mierzalnym, zachowującym klasy mierzalności przekształceniem (Ω, μ), zaś h jest mierzalną funkcją spełniającą $|h(x)| = 1$ prawie wszędzie.

Dla przestrzeni ciągowych izomorfizmy izometryczne sprowadzają się do znakowanych permutacji.

Idea dowodu jest następująca. Zakładamy, że grupa G ma własność FL_p ale nie ma FL_q. Zatem istnieje reprezentacja izometryczna π grupy G w grupie izometrycznych izomorfizmów $O(\ell_q)$ oraz działanie afiniczne

$$\alpha(g) = \pi(g) + b(g)$$

z nią związane, dla którego nie istnieje wektor $v \in \ell_q$, że

$$b(g) = \pi(g)v - v.$$

Korzystając z twierdzenie Banacha-Lamperti możemy tę reprezentację π określić dla każdego $p \geq 1$. Następnie pokazujemy, że reprezentacja π określona na $O(l_r)$ gdzie $r = \frac{p^2}{q}$ ma punkt stały o nieskończonym nośniku. Korzystając z tego faktu możemy z nośnika wydzielić ciąg skończonych orbit permutacji związanej z reprezentacją π. Następnie tworzymy grafy Schreiera na tych orbitach i korzystając z ich własności doprowadzamy do sprzeczności.

Druga część składa się z rozdziału 3 i 4. Rozdział trzeci zawiera wprowadzenie terminologii oraz dwa twierdzenia, z których korzystamy w dalszej części. Pierwszym jest ilościowa wersja twierdzenie Rudina-Cohena-Helsona. Oznaczmy przez Γ grupę dualną do G.

Twierdzenie 2. *Niech $\mu \in M(G)$ będzie miarą idempotentną. Wówczas $\widehat{\mu}$ ma następującą postać*

$$\widehat{\mu} = \sum_{j=1}^{L} \epsilon_j 1_{\gamma_j + \Gamma_j}$$

gdzie $\gamma_j \in \Gamma$, każdy Γ_j jest otwartą podgrupą Γ oraz $L \leq exp(exp(C||\mu||^4))$ dla pewnej stałej C. Ilość podgrup Γ_j jest ograniczona z góry przez $||\mu|| + \frac{1}{100}$.

Drugim jest następujący rezultat [E1].

Twierdzenie 3. *Niech M będzie skończonyn zbiorem liczb pierwszych. Wówczas równanie*

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n+1} = 0,$$

gdzie każdy x_i jest iloczynem liczb pierwszych ze zbioru M,

$$gcd(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = 1,$$

i nie występują tam podsumy równe zero $x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_m}$, ma jedynie skończoną ilość rozwiązań ograniczoną przez $C_1 \cdot \exp(C_2 n^3 \log n))$ gdzie C_1 i C_2 zależą jedynie od M.

Ponadto definiujemy C-lokalną reprezentowalność układów funkcji następująco.

Definicja 3. *Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha i $(f_i)_{i=1}^{\infty} \subset X$, $(g_i)_{i=1}^{\infty} \subset Y$. Powiemy, że $(f_i)_{i=1}^{N}$ jest C-reprezentowalny w $(g_i)_{i=1}^{\infty}$ jeżeli istnieje iniekcja*

$$\sigma_N : \{f_1, f_2, ..., f_N\} \to \{g_i : i \in \mathbb{N}\} \tag{1}$$

spełniająca

$$C^{-1} \| \sum_{j=1}^{N} a_j f_j \|_X \leq \| \sum_{j=1}^{N} a_j \sigma_N(f_j) \|_Y \leq C \| \sum_{j=1}^{N} a_j f_j \|_X \tag{2}$$

dla każdego ciągu skalarów a_j.

W ostatnim rozdziale dowodzimy następujące twierdzenie

Twierdzenie 4. *Niech Γ i Ξ będą grupami dualnymi do grup Vilenkina $\oplus_{i=1}^{N}(\mathbb{Z}_{p_i^{s_i}})^{\omega}$ i $\oplus_{j=1}^{M}(\mathbb{Z}_{q_j^{r_j}})^{\omega}$. Wówczas układ Vilenkina Γ jest lokalnie reprezentowalny w układzie Vilenkina Ξ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $p_i^{s_i} \in \{p_1^{s_1}, p_2^{s_2}, ..., p_N^{s_N}\}$ istnieje $q_j^{r_j} \in \{q_1^{r_1}, q_2^{r_2}, ..., q_M^{r_M}\}$ takie że: $p_i = q_j$ oraz $s_i \leq r_j$.*

Bibliography

[BFGM] U. Bader, A. Furman, T. Gelander, N. Monod *Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces.* Acta Math. Volume 198, Number 1 (2007), 57-105.

[CDH] I. Chatterji, , C. Drutu, F. Haglund *Kazhdan and Haagerup properties from the median viewpoint.* Adv. Math. 255 (2010), no. 2, 882-921.

[Coh] J. Cohen *On a conjecture of Littlewood and idempotent measures.* Am. J. Math. 82, 191-212.

[D] Djubjuk P.E., *On the number of subgroups of a finite abelian group* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 12, (1948) 351 - 378.

[De] P. Delorme *1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations.* Bull. Soc. Math. France, 105 (1997), 281-336.

[Do] J. Dodziuk. *Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks.* Trans. Amer. Math. Soc., 284(2) 0 ,787-794.

[E1] J.-H. Evertse, *On sums of S-units and linear recurrences*, Compos. Math. vol 53 (1984), 225-244.

[E2] J.-H. Evertse, *The number of solutions of decomposable form equations*, Invent. Math. vol 122 (1995), 559–601.

[GS] B: Green, T. Sanders, *A quantitative version of the idempotent theorem in Harmonic Analysis*, Ann. Math. vol 168 (2008), 1025-1054.

[Hel-1] H. Helson *Note on harmonic functions.*, Proc. Am. Math. Soc. 4, 686-691.

[Hel-2] H. Helson *On a theorem of Szego.*, Proc. Am. Math. Soc. 6, 235-242.

[Kaz] D. Kazhdan *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups.* Funct. Anal. Appl., 1:63–65, 1967.

[P] A. Pelczynski *Selected problems on the structre of complemented subspaces of Banach spaces*, in: Methods in Banach Spaces, edited by Jesus M. F. Castillo and William B.

Johnson, London Mathematical Society Lecture Note Series 337, Cambridge University Press (2006), 341–354.

[Ro] J. J. Rotman, *An Introduction to the Group Theory*, Springer, 1995.

[Rud] W. Rudin *Fourier analysis on groups.* Interscience tracts in pure and applied mathematics, Wiley 1962.

[Rud-2] W. Rudin *Idempotent measures on abelian groups.* Pacific J. Math. 9, 195-209.

[Sch] K. Schmidt. *Amenability, Kazhdan's property (T), strong ergodicity and invariant means for group actions.* Ergod. Th. and Dynam. Sys., 1:223–236, 1981.

[vdPS] A. J. van der Poorten, A. J. Sclickewei *The growth condition for recurrence seguences* Macquarie Univ. Math. Rep. 82-0041, North Ryde, Australia, 1982.

[V] N. Vilenkin, *On a class of complete orthonormal systems*, Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR] 11 (1947), 363–400 (Russian, with English summary)

[W] M. Wojciechowski *The non-equivalence between the trigonometric system and the system of functions with pointwise restrictions on values in the uniform and L^1 norms*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc (2011)