ZASTOSOWANIE METOD ALGEBRAICZNYCH W GEOMETRYCZNEJ TOMOGRAFII

STRESZCZENIE

BARTŁOMIEJ ZAWALSKI

Geometryczna tomografia jest gałęzią matematyki zajmującą się odczytywaniem informacji o wysokowymiarowym obiekcie geometrycznym na podstawie jego niskowymiarowych podstruktur [**1**]. Najczęściej są to albo przekroje hiperpłaszczyznami albo rzuty (cienie) na hiperpłaszczyzny. Motyw ten naturalnie łączy się z geometrią wypukłą i wykorzystuje wiele jej narzędzi. Moim badaniom przyświeca idea stowarzyszania z każdą niskowymiarową podstrukturą pewnego obiektu algebraicznego (np. grupy jej afinicznych symetrii). Zakładając, że hiperpowierzchnia jest dostatecznie gładka, pozwala to znaleźć pewne więzy spełniane przez jej wielomian Taylora i tym samym przeformułować założenie geometryczne w języku algebry (nie)przemiennej. Takie homologiczne podejście zwykle wymaga łączenia wielu różnych dziedzin matematyki, od topologii ogólnej i abstrakcyjnej algebry przez równania różniczkowe cząstkowe po geometrię różniczkową i algebraiczną.

Moja rozprawa składa się z trzech niezależnych rozdziałów. Każdy z nich ilustruje zastosowanie powyższego ogólnego paradygmatu do pewnego konkretnego problemu z geometrycznej tomografii.

W pierwszym rozdziale udowodnimy, że środkowosymetryczny obszar gwiaździsty K o dostatecznie gładkim brzegu i o tej własności, że każdy przekrój K hiperpłaszczyzną przechodzącą przez jego środek symetrii jest afinicznym ciałem obrotowym, sam w sobie jest afinicznym ciałem obrotowym. Udzielimy w ten sposób pozytywnej odpowiedzi na pytanie zadane niedawno przez G. Bora, L. Hernándeza-Lamonedę, V. Jiméneza de Santiago i L. Montejano-Peimberta, choć przy nieco zmienionych założeniach. Rozdział ten został już opublikowany jako niezależny artykuł [**3**].

Niech $f \in W^{3,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ będzie funkcją określoną na spójnym, otwartym podzbiorze $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. W drugim rozdziale pokażemy, że jej wykres jest zawarty w powierzchni kwadratowej wtedy i tylko wtedy, gdy f jest słabym rozwiązaniem pewnego układu równań różniczkowych cząstkowych 3. rzędu, o ile wyznacznik hesjanu f jest nie jest niedodatni na całym Ω. Udowodnimy ponadto, że układ ten jest w pewnym sensie najprostszy możliwy w szerokiej klasie równań różniczkowych, co umożliwi klasyfikację wszystkich wielomianowych równań różniczkowych cząstkowych spełnianych przez parametryzacje powierzchni kwadratowych. Choć będziemy wykorzystywać głównie narzędzia algebry liniowej i przemiennej, samo twierdzenie jest także w pewien sposób związane z funkcjami holomorficznymi. Żmudne obliczenia przeprowadzimy w powszechnie używanym systemie algebry komputerowej Wolfram Mathematica [**2**]. Pomimo tego, dowód wciąż pozostaje możliwy do zweryfikowania przez człowieka.

Nieskończenie gładkie symetryczne ciało wypukłe $K \subset \mathbb{R}^d$ nazywamy k-separowalnie całkowalnym (oryg. *k-separably integrable*), $1 \leqslant k < d$, jeśli jego k-wymiarową funkcję objętości $V_{K,H}(t) = \mathcal{H}^d(\{\boldsymbol{x} \in K : \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, H^\perp) \leqslant t\})$ można zapisać jako skończoną sumę iloczynów, w których zależność od $H \in \operatorname{Gr}(k, \mathbb{R}^d)$ i $t \in \mathbb{R}$ jest rozdzielona. W trzecim rozdziale otrzymamy kompletną klasyfikację takich ciał. Mianowicie udowodnimy, że jeśli $d-k$ jest parzyste, to wówczas K jest elipsoidą, zaś jeśli $d-k$ jest nieparzyste, to wówczas K jest euklidesową kulą. Jest to uogólnienie niedawnej klasyfikacji wielomianowo całkowalnych (oryg. *polynomially integrable*) ciał wypukłych w przypadku symetrycznym. Rozdział ten jest oparty na wspólnej pracy z V. Yaskinem.

Literatura

[**1**] R. J. Gardner, *Geometric tomography*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 13, Cambridge University Press, 2006.

[**2**] Wolfram Research, Inc., *Mathematica, Version 11.0.0*, Champaign, IL, 2016.

[**3**] B. Zawalski, *On star-convex bodies with rotationally invariant sections*, Beiträge zur Algebra und Geometrie (2023).

Polska Akademia Nauk, Instytut Matematyki
Adres email: `b.zawalski@impan.pl`