STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ „CARDINAL INVARIANTS OF THE CONTINUUM AND CONVERGENCE OF MEASURES ON COMPACT SPACES”

DAMIAN SOBOTA

Niniejsza rozprawa poświęcona jest badaniu pewnych aspektów kombinatorycznych i teoriomnogościowych wybranych ciągowych własności przestrzeni regularnych miar na przestrzeniach zwartych lub — ogólniej — przestrzeni Banacha wyposażonych w topologie słabe. Jako główne narzędzie badań zastosowano niezmienniki kardynalne continuum, co pozwoliło częściowo odkryć kombinatoryczną naturę tych własności oraz otrzymać ograniczenia na wielkości teoriomnogościowych struktur z nimi związanych. Ograniczenia te w dalszej kolejności doprowadziły do uzyskania wyników mówiących o nierozstrzygalności istnienia przestrzeni Banacha, których przeliczalne podzbiory mają określone cechy.

Pierwszym rozdziałem rozprawy zawierającym oryginalne wyniki jest Rozdział 3. Rezultaty w nim przedstawione zostały otrzymane przy współpracy z G. Plebankiem i opublikowane w *Fundamenta Mathematicae* [15]. W rozdziale tym zajmujemy się związkiem między ciasnością przestrzeni miar regularnych na przestrzeni zwartej a ich typem Maharam. Niech K będzie przestrzenią zwartą Hausdorffa. Przez $C(K)$ i $M(K)$ oznaczamy odpowiednio przestrzeń funkcji ciągłych na K z normą supremum oraz przestrzeń regularnych miar na K mających skończoną wariację. Na mocy tw. Riesza o reprezentacji przestrzeń $M(K)$ możemy utożsamiać z przestrzenią $C(K)^*$ ciągłych funkcjonałów liniowych na $C(K)$. Niech $P(K)$ będzie zbiorem wszystkich regularnych miar probabilistycznych na K. Wówczas $P(K)$ dziedziczy z $M(K)$ topologię *-słabą. Przypomnijmy, że przez *ciasność* przestrzeni topologicznej X rozumiemy najmniejszą liczbę kardynalną $\tau(X)$ taką, że dla każdego podzbioru $A \subseteq X$ oraz punktu $x \in \overline{A}$ istnieje podzbiór $B \subseteq A$ mocy niewiększej niż $\tau(X)$ taki, że $x \in \overline{B}$. Przez *typ Maharam* miary $\mu \in P(K)$ rozumiemy z kolei gęstość przestrzeni Banacha $L_1(\mu)$ funkcji μ-całkowalnych.

Fremlin [7], zakładając aksjomat Martina $\mathrm{MA}(\omega_1)$, udowodnił, że jeżeli na K istnieje miara $\mu \in P(K)$ typu nieprzeliczalnego, to K odwzorowuje się w sposób ciągły na kostkę $[0,1]^{\omega_1}$, co oznacza, że K ma nieprzeliczalną ciasność. Ponieważ $P(K)$ zawiera kopię K, $P(K)$ musi mieć również nieprzeliczalną ciasność. Z kolei Talagrand [19] udowodnił w ZFC, że jeżeli istnieje miara $\mu \in P(K)$ typu ω_2, to $P(K)$ odwzorowuje się w sposób ciągły na kostkę $[0,1]^{\omega_2}$, zatem jeżeli $\tau(P(K)) \leq \omega_1$, to każda miara $\mu \in P(K)$ ma typ Maharam równy co najwyżej ω_1.

Wobec powyższych wyników, w Rozdziale 3 stawiamy następujące pytanie: czy jeżeli przestrzeń $P(K)$ ma przeliczalną ciasność, to każda miara $\mu \in P(K)$ ma przeliczalny typ Maharam, tj. $L_1(\mu)$ jest ośrodkowa? Uzyskaliśmy częściową odpowiedź na postawione pytanie, mianowicie, udowodniliśmy, że jeżeli przestrzeń $P(K \times K)$ probabilistycznych regularnych miar na kwadracie $K \times K$ ma przeliczalną ciasność, to każda miara $\mu \in P(K)$ ma przeliczalny typ Maharam.

Jako wniosek z powyższego twierdzenia otrzymujemy nowy, elementarny dowód twierdzenia Bourgaina–Todorčevića mówiący, że każda miara na kompakcie Rosenthala ma przeliczalny typ Maharam (Bourgain [2], Todorčević [20]). Przypomnijmy, że przestrzeń zwarta Hausdorffa jest *kompaktem Rosenthala*, jeżeli zanurza się w przestrzeń $B_1(X)$ funkcji pierwszej klasy Baire'a na pewnej przestrzeni polskiej X. Ponadto, otrzymaliśmy równoważność mówiącą, że przestrzeń $P(K \times K)$ ma przeliczalną ciasność wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń $C(K \times K)$ ma własność (C) Corsona, co częściowo odpowiada na pytania zawarte w pracy Pola [14].

W kolejnych rozdziałach rozprawy zajmujemy się badaniem kombinatorycznych aspektów klasycznych twierdzeń z teorii miar wektorowych i teorii przestrzeni Banacha za pomocą niezmienników kardynalnych continuum.

W Rozdziale 4 badamy kombinatoryczne aspekty lematu Rosenthala ([16]), klasycznego wyniku w swojej szczególnej postaci mówiącego, że dla każdego antyłańcucha $\langle a_n\colon\ n \in \mathbb{N}\rangle$ w dowolnej algebrze Boole'a $\mathcal{A}$, każdego ciągu dodatnich miar $\langle \mu_k\colon\ k \in \mathbb{N}\rangle$ na $\mathcal{A}$ takiego, że $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_k\big(a_n\big) \le 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, i $\varepsilon > 0$, istnieje nieskończony podzbiór A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ taki, że dla każdego $k \in A$ zachodzi:

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\neq k}} \mu_k\big(a_n\big) < \varepsilon.$$

Przypomnijmy, że ultrafiltr $\mathcal{F}$ na zbiorze $\mathbb{N}$ jest *selektywny* (zwany również *ramseyowskim*), jeżeli dla każdej partycji $\langle P_n\colon\ n \in \mathbb{N}\rangle$ zbioru $\mathbb{N}$ albo zachodzi $P_n \in \mathcal{F}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, albo istnieje $F \in \mathcal{F}$ taki, że $|P_n \cap F| \le 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Istnienie ultrafiltrów selektywnych jest niezależne od ZFC (Kunen [11]). Zakładając ich istnienie, dowodzimy, że jeżeli $\mathcal{U}$ jest bazą ultrafiltru selektywnego, to zbiór A w lemacie Rosenthala może zostać wybrany z $\mathcal{U}$ (mówimy wtedy, że $\mathcal{U}$ jest *rodziną Rosenthala*). Z drugiej strony, pokazujemy, że żadna rodzina nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ o mocy ściśle mniejszej niż liczba pokrywająca kategorii $\operatorname{cov}(\mathcal{M})$ nie ma takiej własności (tj. jeżeli $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$ jest niepusta i $|\mathcal{F}| < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$, to $\mathcal{F}$ nie jest rodziną Rosenthala), co prowadzi do wniosku, że przy aksjomacie Martina każda rodzina Rosenthala jest mocy continuum $\mathfrak{c}$. Z drugiej strony, np. w modelu Sacksa prawdziwa jest nierówność $\omega_1 < \mathfrak{c}$ oraz istnieje w tym modelu ultrafiltr selektywny o bazie wielkości ω_1, zatem istnienie rodziny Rosenthala o mocy ściśle mniejszej niż $\mathfrak{c}$ jest niezależne od aksjomatów ZFC+$\neg$CH.

Rozdział 5 poświęcony jest badaniu kombinatorycznych własności rodzin podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ związanych z lematem Phillipsa i twierdzeniem Schura. Przypomnijmy, że lemat Phillipsa ([13]) orzeka, że dla każdego ciągu miar $\langle \mu_n\colon\ n \in \mathbb{N}\rangle$ na algebrze $\wp(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ takiego, że $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0$ dla każdego $A \in \wp(\mathbb{N})$, zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in\mathbb{N}} \big|\mu_n\big(\{j\}\big)\big| = 0.$$

Wnioskiem z lematu Phillipsa jest stwierdzenie, że dla każdego ciągu $\langle x_n \in \ell_1\colon\ n \in \mathbb{N}\rangle$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_1 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A \in \wp(\mathbb{N})$ zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in A} x_n(j) = 0.$$

W szczególności, prawdziwe jest twierdzenie Schura ([18]) mówiące, że słaba zbieżność ciągu w przestrzeni ℓ_1 pociąga zbieżność normową. W związku z tym wprowadzamy dwa pojęcia: 1) $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$ jest *rodziną Phillipsa*, jeżeli dla każdego ciągu miar $\langle \mu_n\colon\ n \in \mathbb{N}\rangle$ na algebrze $\wp(\mathbb{N})$ takiego, że $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$, zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in\mathbb{N}} \left|\mu_n(\{j\})\right| = 0;$$

2) $\mathcal{F}$ jest *rodziną Schura*, jeżeli dla każdego ciągu $\langle x_n \in \ell_1\colon\ n \in \mathbb{N}\rangle$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_1 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A \in \mathcal{F}$ zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in A} x_n(j) = 0.$$

Każda rodzina Phillipsa jest automatycznie rodziną Schura.

W Rozdziale 5 dowodzimy w ZFC, że każda rodzina Schura musi mieć moc równą co najmniej niezmiennikowi kardynalnemu $\mathfrak{p}$ (*pseudo-intersection number*). W związku z tym, przy aksjomacie Martina każda rodzina Schura (a więc Phillipsa) jest mocy continuum $\mathfrak{c}$. Ponadto, konstruujemy w ZFC rodzinę Phillipsa o mocy równej $\mathrm{cof}(\mathcal{N})$, tj. kofinalności ideału zbiorów zerowych względem miary Lebesgue'a. Ponieważ istnieją modele teorii mnogości, w których $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \omega_1 < \mathfrak{c}$, jako wniosek otrzymujemy stwierdzenie, że istnienie rodziny Phillipsa (Schura) o mocy ściśle mniejszej niż $\mathfrak{c}$ jest niezależne od ZFC+$\neg$CH.

Ponadto, w Rozdziale 5 zajmujemy się pokrótce kwestią wielkości podzbiorów przestrzeni ℓ_∞, które rozstrzygają ograniczoność podzbiorów w ℓ_1 (jako funkcjonały na ℓ_1).

Kolejny rozdział rozprawy, Rozdział 6, poświęcony jest własności Nikodyma algebr Boole'a. Algebra Boole'a $\mathcal{A}$ ma *własność Nikodyma*, jeżeli każdy ciąg miar $\langle \mu_n\colon\ n \in \mathbb{N}\rangle$ na $\mathcal{A}$, dla którego zachodzi $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\mu_n(a)\right| < \infty$ dla każdego $a \in \mathcal{A}$, jest ograniczony w normie (wariacji), tj. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mu_n\| < \infty$. Nikodym [12] udowodnił, że każda σ-zupełna algebra Boole'a ma własność Nikodyma. Ponadto, wiele słabszych warunków okazało się również implikować własność Nikodyma, por. np. Schachermayer [17], Haydon [9], Freniche [8]. Schachermayer również pokazał, że algebra wszystkich podzbiorów odcinka $[0,1]$ mierzalnych w sensie Jordana ma tę własność.

W Rozdziale 6 podajemy pierwszy znany niesprzeczny przykład algebry Boole'a o mocy ściśle mniejszej niż $\mathfrak{c}$ mającej własność Nikodyma. Ściślej, konstruujemy algebrę mocy κ dla liczby kardynalnej κ takiej, że $\kappa = \mathrm{cof}([\kappa]^\omega) \geq \mathrm{cof}(\mathcal{N})$, gdzie $\mathrm{cof}(\mathcal{N})$ to kofinalność miary. Ponadto, analizujemy za pomocą niezmienników kardynalnych możliwą minimalną moc nieskończonej algebry z własnością Nikodyma. Jako wniosek otrzymujemy, że istnienie nieskończonej algebry Boole'a z własnością Nikodyma o mocy ściśle mniejszej niż continuum $\mathfrak{c}$ jest niezależne od aksjomatów ZFC+$\neg$CH.

Otrzymany rezultat ma kilka zastosowań, np. w teorii C*-algebr, zagadnieniach związanych z kofinalnością algebr Boole'a czy w problemie Efimova.

Przypomnijmy, że *problem Efimova* pyta, czy każda nieskończona przestrzeń zwarta Hausdorffa zawiera kopię uzwarcenia Čecha–Stone'a liczb naturalnych $\beta\mathbb{N}$ lub nietrywialny ciąg zbieżny. Istnieje wiele niesprzecznych kontrprzykładów do problemu Efimova, por. np. Fedorchuk [6], Dow [4], Dow i Shelah [5]. Przestrzeń Stone'a algebry Boole'a zaprezentowanej w Rozdziale 6 również stanowi taki kontrprzykład, mający ponadto tę własność, że każdy jego nieskończony domknięty podzbiór ma ciężar większy niż minimalna moc nieskończonej algebry Boole'a z własnością Nikodyma.

Przestrzeń Banacha X ma *własność Grothendiecka*, jeżeli każdy ciąg funkcjonałów $\langle x_n^*\colon\ n \in \mathbb{N}\rangle$ na X, który jest *-słabo zbieżny, jest słabo zbieżny. Przykładami przestrzeni z własnością Grothendiecka są przestrzenie refleksywne, przestrzeń ℓ_∞ (Grothendieck [10]) oraz przestrzeń H^∞ ograniczonych funkcji analitycznych na dysku jednostkowym (Bourgain [3]). Z kolei, algebra Boole'a ma *własność Grothendiecka*, jeżeli przestrzeń Banacha $C(K_{\mathcal{A}})$ funkcji ciągłych na jej przestrzeni Stone'a ma własność Grothendiecka. Grothendieck [10] udowodnił, że σ-zupełne algebry Boole'a mają własność Grothendiecka. Ponadto, uzyskano wiele przykładów osłabienia założenia σ-zupełności, por. Schachermayer [17], Haydon [9], Aizpuru [1].

W Rozdziale 7 prezentujemy przykład konstrukcji algebry Boole'a z własnością Grothendiacka o mocy κ, gdzie κ jest liczbą kardynalną taką, że $\kappa = \operatorname{cof}([\kappa]^\omega) \geq \max\big(\mathfrak{dg}, \min(\operatorname{cof}(\mathcal{N}), \mathfrak{u}_s)\big)$, gdzie $\mathfrak{dg}$ jest niezmiennikiem kardynalnym continuum ściśle związanym z charakteryzacją Dieudonnégo–Grothendiecka podzbiorów słabo zwartych przestrzeni $C\big(2^{\mathbb{N}}\big)^*$, a $\mathfrak{u}_s$ oznacza minimalną moc bazy ultrafiltru selektywnego (lub $\mathfrak{c}$, jeżeli taki ultrafiltr nie istnieje). Ponadto, analizujemy pokrótce możliwą minimalną moc nieskończonej algebry Boole'a z własnością Grothendiecka.

Literatura

1. A. Aizpuru, *Relaciones entre propiedades de supremo y propiedades de inerpolación en álgebras de Boole*, Collect. Math. 39 (1988), 115–125.
2. J. Bourgain, *PhD Dissertation*, Université libre de Bruxelles (Free University of Brussels), Brussels, 1977.
3. J. Bourgain, *H^∞ is a Grothendieck space*. Studia Math. 75 (1983), 193–216.
4. A. Dow, *Efimov spaces and the splitting number*, Spring Topology and Dynamical Systems Conference, Topology Proc. 29 (2005), 105–113.
5. A. Dow, S. Shelah, *An Efimov space from Martin's Axiom*, Houston J. Math. 39 (2013), no. 4, 1423–1435.
6. V.V. Fedorchuk, *A bicompactum whose infinite closed subsets are all n-dimensional*, Mat. Sb. Novaya Seriya 96 (138) (1975), 41–62 and 167 (Russian); English transl.: Math. USSR Sb. 25 (1976), 37–57.
7. D.H. Fremlin, *On compact spaces carrying Radon measures of uncountable Maharam type*, Fund. Math. 154 (1997), 295–304.
8. F. J. Freniche, *The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the subsequential interpolation property*, Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1984), no. 3, 362–366.
9. R. Haydon, *A nonreflexive Grothendieck space that does not contain ℓ_∞*, Israel J. Math. 40 (1981), no. 1, 65–73.

10. A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$*, Canadian J. Math. 5 (1953), 129–173.
11. K. Kunen, *Some points in $\beta\mathbb{N}$*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 80 (1976), no. 3, 385–398.
12. O. Nikodym, *Sur les familles bornées de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait*, Monatsh. Math. Phys. 40 (1933), no. 1, 418–426.
13. R.S. Phillips, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), 516–541.
14. R. Pol, *Note on the spaces of regular probability measures whose topology is determined by countable subsets*, Pacific J. Math. 100 (1982), 185–201.
15. G. Plebanek, D. Sobota, *Countable tightness in the spaces of regular probability measures*, Fund. Math. 229 (2015), no. 2, 159–169.
16. H. Rosenthal, *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory*, Studia Math. 37 (1970), 13–36. Errata: *Correction to the paper "On relatively..."*, idem, 311–313.
17. W. Schachermayer, *On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 214 (1982).
18. J. Schur, *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*, J. Reine Angew. Math. 151 (1921), 79–111.
19. M. Talagrand, *Sur les espace de Banach contenant l^τ*, Israel J. Math. 40 (1981), 324–330.
20. S. Todorčević, *Compact sets of the first Baire class*, J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), 1179–1212.