Wrocław, 14. czerwca 2018 r.

Światosław Gal
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
sgal@math.uni.wroc.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Damiana Sawickiego
On the geometry of metric spaces defined by group actions:
from circle rotations to superexpanders

Przedstawiona rozprawa jest obszernym, bardzo dobrze zredagowanym tekstem matematycznym. Jestem bardzo miło zaskoczony jakością typograficzną tekstu. Praktycznie jedynym rzucającym się w oczy błędem jest używanie póupauzy zamiast pauzy.

Autor rozprawy opanował w imponującym stopniu geometryczną teorię grup, zgrubną geometrię, analizę harmoniczną i K-teorię.

W pierwszej części autor solidnie prezentuje wykorzystywane przez siebie fragmenty zgrubnej geometrii; zarówno z prac Roe, Druţu i promotora jak i własnych. Powoduje to, że nie tylko jest ona czytelna dla recenzenta, ale nadaje się na podręcznik do semestralnego wykładu monograficznego z geometrycznej teorii grup. Imponuje, szeroka tematycznie, bibliografia składająca się z bez mała dwustu pozycji.

Części II–IV stanowią omówienie oryginalnych prac doktoranta.

Część wyników przedstawionych w rozprawie została opublikowana w co najmniej przyzwoitych czasopismach i należy oczekiwać, że pozostałe preprinty, na razie dostępne w arXivum, również w takich zostaną przyjęte do druku.

Ponieważ praca dotyczy zgrubnej geometrii w recenzji będziemy pisać włożenie (wkładalność itp.) mając na myśli zgrubne włożenie.

Omówienie (ważniejszych) wyników

Część II. Ta część rozprawy dotyczy wkładalności skręconych stożków m. in. w przestrzenie Hilberta (wkładalność w inne przestrzenie funkcyjne jest ostatnio bardzo modnym tematem badań, jednak osiągnięte wyniki dotyczące przestrzeni Hilberta są już dostatecznie ciekawe).

Jan Roe wymyślił skręcone stożki jako źródło przykładów przestrzeni metrycznych nie wkładalnych w przestrzenie Hilberta. Przykłady Roego nie tylko nie wkładają się w przestrzenie Hilberta ale nie posiadają własności A (wprowadzonej przez Guolianga Yu a zwanej czasami też *zgrubną średniowalnością*).

Wiadomo, że własność A pociąga wkładalność. Pierwszy przykład przestrzeni wkładalnej w przestrzeń Hilberta skonstruował w pracy z 2007 r. Piotr Nowak. Od tego czasu wymyślono inne przestrzenie o tej własności: pewne przestrzenie pudełkowe (wynik Arjantsevej, Guertnera i Špakuli z 2012 r.) czy szczególne grupy małych skreśleń Osajdy z 2015 r.

Praca Roego pochodzi z 2005 r. Dlatego pytanie czy wkładalność w przestrzenie Hilberta pociąga własność A w klasie skręconych stożków jest interesującym i dobrze postawionym problemem badawczym.

Doktorant odpowiada na postawione pytanie przecząco rozpatrując jak powyżej ciąg podgrup skończonego indeksu o trywialnym przekroju. Związane z tym są dwa obiekty: przestrzeń pudełkowa $\Box$ oraz skręcony stożek $\mathcal{O}$ działania na uzupełnieniu grupy względem tej rodziny.

Nie wiem czy Roe wiedział, że przestrzeń pudełkowa $\Box$ wkłada się w skręcone stożki (łatwo to pokazać, jeśli działanie zawiera dostatecznie dużo punktów periodycznych). Ale rozumiał, że te przestrzenie mają podobne własności.

Doktorant konstruuje włożenie $\Box$ w $\mathcal{O}$. Natychmiastwą konsekwencją tego włożenia jest istnienie stożków bez własności A (wynik Roego). Przykłady przestrzeni pudełkowych bez własności A są klasyczne — pochodzą z rezydualnie skończonych grup z własnością (τ).

Doktorat idzie znacznie dalej. Pokazuje on, że (w ogólności dziedziczne) własności A oraz wkładalność w przestrzeń Hilberta mniejszej z rozważanych przestrzeni implikują te same własności dla większej. Pomimo, że istnienie wkładalnych skręconych stożków bez własności A jest „jedynie” bezpośrednią konsekwencją rezultatu Arjantsevej, Guertnera i Špakuli uważam porównanie przestrzeni $\Box$ oraz $\mathcal{O}$ za bardzo elegancki i wartościowy wynik.

Drugi wynik w tej części pokazuje, że wolne działanie, którego stożek ma własność A musi być średniowalne. Prostsza, odwrotna implikacja pochodzi z pracy Roego.

<u>Część III.</u> W tej części doktorant otrzymuje interesujące wyniki na temat sztywności. Na przykład, jeśli wolne działania dwu grup Γ i Δ na rozmaitościach wymiaru m i n prowadzą do kwaziizometrcznych skręconych stożków, to $\Gamma \times \mathbf{Z}^m$ oraz $\Delta \times \mathbf{Z}^n$ są kwaziizometryczne. Nie jest prawdą, że same grupy Γ i Δ muszą być kwaziizometryczne jak pokazują przykłady kwaziizometrycznych stożków działań grup o różnym wymiarze asympotycznym nad różnymi (różnowymiarowymi) rozmaitościami (skonstruowane wspólnie z Dawidem Kielakiem).

Wspomniane powyżej przykłady oraz ich analiza stanowią krok w klasyfikacji skręconych stożków nad obrotem okręgu, zapoczątkowanej przez Hyun Jeong Kim.

Skręcone stożki są konstruktami działania a nie grupy więc należy je ostrożnie porównywać z przestrzeniami pudełkowymi, ale omówione wyniki słusznie skonfrontowano w pracą Delabie i Khukhro, w której autorzy dowodzą, że kwaziizometryczność tych ostatnich pociąga komensurowalność grup.

<u>Część IV.</u> Związek ekspanderów ze średniowalnością i wkładalnością w przestrzenie funkcyjne jest klasyczny. Doktorant podaje kryterium na to, żeby skręcony stożek był kwaziizometryczny z ekspanderem (względem bardzo ogólnych klas przestrzeni). Wśród nich

są takie, które nie są kwaziizometryczne z przestrzeniami pudełkowymi (ekspanderami pochodzącymi z konstrukcji Margulisa).

W ostatnim rozdziale doktorant rozwiązuje pozytywnie hipotezę Druţu i promotora mówiącą, że jeśli działanie ma lukę spektralną to odwzorowanie porównawcze (w hipotezie Bauma i Connesa) nie jest suriekcją.

Konkluzja

Przedstawiona rozprawa doktorska z naddatkiem spełnia zwyczajowe warunki stawiane rozprawom doktorskim. Uzasadnia ona nadanie doktorantowi stopnia naukowego doktora nauk matematycznych. Wnoszę o jej przyjęcie i dopuszczenie mgra Damiana Sawickiego do kolejnych etapów przewodu doktorskiego.

Każda z części II-IV mogłaby stanowić przyzwoitą rozprawę doktorską. Wnoszę o wyróżnienie rozprawy.