Streszczenie rozprawy doktorskiej „On the geometry of metric spaces defined by group actions: from circle rotations to super-expanders”

Damian Sawicki

W 2005 John Roe zaproponował konstrukcję [22], która działaniu skończenie generowanej grupy na zwartej przestrzeni metrycznej przyporządkowuje nieograniczoną przestrzeń metryczną, której geometria jest wynikiem interakcji działania z geometrią początkowej zwartej przestrzeni. Niniejsza praca poświęcona jest badaniu związków między dynamicznymi i ergodycznymi własnościami działania oraz własnościami działającej grupy a własnościami metrycznymi uzyskiwanej przestrzeni, zwanej skręconym stożkiem.

Skręcone stożki były pomyślane jako bogate źródło przykładów i kontrprzykładów w geometrii dużej skali – chcąc uzyskać przestrzenie metryczne o zadanych cechach, wystarczy zidentyfikować dynamiczną własność działania, która implikuje te cechy dla skręconego stożka, a wówczas dowolne działanie o tej własności wyprodukuje nam pożądany przykład.

W szczególności Roe udowodnił, że działania średniowalne (w tym wszystkie działania średniowalnych grup) produkują skręcone stożki posiadające własność A [30], zaś zachowujące miarę działania grup bez własności Haagerupa produkują stożki niezanurzalne zgrubnie w przestrzeń Hilberta [12]. We wspólnej pracy z Jianchao Wu [24] udało nam się obie te implikacje odwrócić, uogólniając jednocześnie drugą implikację i jej odwrotność na przypadek przestrzeni Banacha, przy czym warunek zgrubnej zanurzalności należy zastąpić tzw. włóknistą zgrubną zanurzalnością [7]. Wprowadzamy w tym celu pojęcie działań linearyzowalnych, które – jak się okazuje – ma swoje korzenie w pracach Mostowa sprzed 60 lat.

Powyższe pozwala uzyskiwać wiele przykładów przestrzeni nieposiadających własności A, lecz włókniście zgrubnie zanurzalnych w przestrzeń Hilberta – wystarczy dowolne zachowujące miarę działanie grupy wolnej, ponieważ nie jest ona średniowalna (zatem nie może działać jednocześnie w sposób średniowalny i zachowujący miarę), ale ma własność Haagerupa.

Nie rozstrzyga to jednak, czy istnieją skręcone stożki bez własności A, lecz zgrubnie zanurzalne w przestrzeń Hilberta (co jest warunkiem silniejszym niż jego „włókniste” uogólnienie), które to pytanie było przed czterema laty punktem wyjścia tej rozprawy. Problem ten w większej ogólności był intensywnie badany w ostatnich latach i polscy matematycy położyli tu istotne zasługi. Pierwsze przykłady zgrubnie zanurzalnych przestrzeni metrycznych bez własności A (dowodzące, że obie własności nie są równoważne) zostały znalezione przez Piotra W. Nowaka w 2006 [17], a spektakularne przykłady wśród grup skonstruował w 2014 Damian Osajda [19].

Jak się okazuje, powyższa metoda polegająca na identyfikacji własności działania produkującego żądany stożek nie wystarcza do rozwiązania niniejszego problemu. Podajemy bowiem przykład działania, które – w zależności od początkowej metryki na zwartej przestrzeni będącej pod działaniem grupy – może produkować stożek zanurzalny lub nie. Jest to szczególnie zaskakujące wobec równoważności takich jak wspomniane powyżej.

Rozwiązanie można uzyskać natomiast poprzez redukcję do innego problemu. Okres pomiędzy [17,19] obfitował w prace konstruujące zanurzalne przestrzenie bez własności A, które najczęściej były uzyskiwane jako rodziny skończonych ilorazów nieskończonej grupy [1,6,13,14,21]. Skręcony stożek nad uzupełnieniem proskończonym takiej grupy (dokładniej: granicą odwrotną takiej rodziny ilorazów) zawierać będzie quasi-izometrycznie daną rodzinę i wykazywać podobne do niej własności. Pytanie o takie zawieranie postawił Pierre Pansu. Jest to szczególnie istotne ze względu na obszerną literaturę dotyczącą takich ilorazów (hasła takie jak „ekspander typu Margulisa" bądź „przestrzeń pudełkowa" (ang. *box space*)).

Powyższe zawieranie pozwala w szczególności zredukować pytania o wymiar asymptotyczny rodzin skończonych ilorazów studiowane w [8,10,25] do uzyskanych w ostatnich latach wyników na temat wymiaru działań [3,25] (znanego jako „ekwiwariantny wymiar asymptotyczny" bądź „wymiar średniowalności") na – w tym wypadku – uzupełnieniu proskończonym. Używany jest tutaj wynik Wu i Zachariasa wiążący oba te wymiary, który jest ilościową wersją omawianej wyżej równoważności między własnością A stożka i średniowalnością działania.

Wynik ten umożliwił także uzyskanie oczekiwanego faktu – którego nie udało się jednak wcześniej udowodnić – że wymiar działania grupy można oszacować przez wymiar działania podgrupy skończonego indeksu. Dowód używa zgrabnej koncepcji odwzorowań „zgrubnie n-do-jednego" [2,16], które, co ciekawe, są w tym przypadku bijekcjami. Przede wszystkim jednak – poprzez zastosowanie ostatniego wyniku Yamauchiego [29] i twierdzenia Hurewicza dla wymiaru asymptotycznego [4,5] – uzyskano górne oszacowania na wymiar działań grup wirtualnie nilpotentnych i poprawiono znane oszacowania dla grup nilpotentnych. W przypadku działań na zbiorze Cantora (dowolnych grup) te nowe szacowania pokrywają się z dolnymi, co daje pozytywną odpowiedź na pytanie Willetta.

Powyższe wyniki używające argumentu Yamauchiego ściśle wiążą się z wprowadzonym w rozprawie pojęciem własności kawałkowych (ang. *piecewise property*), inspirowanych pytaniem Osajdy o charakteryzację własności A grupy poprzez niezmienniki jej skończonych ilorazów [20]. Poza własnością A własności kawałkowe pozwalają scharakteryzować wymiar asymptotyczny, hiperboliczność czy zgrubną zanurzalność w dowolną przestrzeń Banacha. Koncepcja jest prosta, lecz – jak się wydaje – nie pojawiła się dotąd w literaturze.

Własności kawałkowe mogą być przydatne wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia z „asymptotycznie wiernymi" odwzorowaniami wprowadzonymi przez Willetta i Yu [28]. We wspomnianej pracy z Jianchao Wu [24] skonstruowaliśmy nad skręconym stożkiem takie asymptotycznie wierne nakrycie Galois, pokazując tym samym, że skręcona metryka (tzn. metryka na skręconym stożku) jest metryką ilorazową pochodzącą od stosunkowo prostej przestrzeni (często produktu kartezjańskiego grupy i tzw. nieskończonego stożka).

Nakrycie takie w ocenie autora stwarza dogodne środowisko do badania zgrubnej grupy podstawowej, poprzez analogię z powiązaniem teorii nakryć i grup podstawowych w klasycznym przypadku. Rozprawa zawiera w szczególności krótki rachunek identyfikujący zgrubną grupę podstawową skręconego stożka, jednak nie wnosi nowych wyników do teorii. Spektakularne wyniki w tym zakresie uzyskali D. Fisher, T. Nguyen oraz W. van Limbeek [11], którzy – dla działań na przestrzeniach jednorodnych – udowodnili quasi-izometryczną sztywność: dwa quasi-izometryczne skręcone stożki muszą pochodzić od niemalże tego samego działania. To nowy kierunek w stosunku do obszernej literatury dotyczącej quasi-izometrycznej sztywności dla grup oraz teorio-ergodycznej sztywności dla działań (ang. *orbit equivalence superrigidity*, *weak-star superrigitity*).

Rozprawa zawiera istotnie prostszą wersję wyniku [11] działającą przy dodatkowym (silnym) założeniu. Założenie to jest w istocie konieczne – wspólnie z Dawidem Kielakiem (w apendyksie do [23]) skonstruowaliśmy continuum działań przez obroty na okręgu dających parami quasi-izometryczne skręcone stożki. Co więcej, wskazaliśmy przykłady działań quasi-nieizometrycznych grup produkujących quasi-izometryczne skręcone stożki. Przykłady te pozwoliły potem w [11] uzasadnić ich techniczne założenia (pominięte w powyższej dyskusji).

Istnieją jednak poważne ograniczenia na geometrię dwóch grup dających quasi-izometryczne stożki, dowodzimy bowiem – już bez specjalnych dodatkowych założeń – że muszą być one „stabilnie" quasi-izometryczne. Jak zauważyli De Laat i Vigolo [15], wynik ten pozwala odróżnić poziomy skręconego stożka od skończonych ilorazów niektórych grup poprzez odwołanie do quasi-izometrycznej sztywności dla grup. Z drugiej strony, dla pewnych stożków – zestawiając powyższą stabilną quasi-izometrię z odpowiednim izomorfizmem zgrubnych grup podstawowych – Vigolo udowodnił [27], że nie mogą być one quasi-izometryczne ze skończonymi ilorazami żadnej grupy. Daje to w szczególności formalne potwierdzenie, że pewne uzyskane w niniejszej rozprawie super-ekspandery i kontrprzykłady na zgrubną hipotezę Bauma–Connesa są quasi-izometrycznie różne od znanych wcześniej przykładów konstruowanych jako skończone ilorazy.

Dowodzimy także, że skręcone stożki nad działaniami na przestrzeniach ultrametrycznych nie są zgrubnie równoważne z żadną rodziną grafów (w szczególności z rodziną skończonych ilorazów bądź skończonych grafów Schreiera), pomimo że są one w odpowiednim sensie spójne (c-łańcuchowalne). Pozwala to na uzyskanie dla niegrafów zachowań dotychczas kojarzonych z ekspanderami: zgrubnej niezanurzalności, logarytmicznej dystorsji i naruszania zgrubnej hipotezy Bauma–Connesa.

Ostatnia część rozprawy poświęcona jest właśnie takim zachowaniom. W pracy wprowadzającej skręcone stożki Roe zwraca uwagę [22], że indukowane działanie na skręconym stożku jest tzw. działaniem przez przesunięcia, tzn. istnieje jednostajne ograniczenie na odległość punktu od jego obrazu. Tym samym możemy uzyskać reprezentację grupy w operatorach o skończonej propagacji (lecz niekoniecznie lokalnie zwartych czy choćby pseudolokalnych, co powoduje istotne trudności w kontekście zgrubnych hipotez Bauma–Connesa).

Warunek luki spektralnej (nierówność Poincarégo) stwierdza, że norma funkcji jest porównywalna z normą jej „gradientu" zdefiniowanego poprzez takie operatory. Gdyby badane funkcje pochodziły od zgrubnego zanurzenia, ich normy musiałyby rosnąć wraz ze średnicą poziomu stożka, zaś ich „gradienty" pozostać ograniczone ze względu na skończoną propagację – wykorzystując tę sprzeczność, wspólnie z Piotrem W. Nowakiem [18], pokazaliśmy zgrubną niezanurzalność w różne przestrzenie Banacha stożków nad działaniami z lukami spektralnymi.

Przy dodatkowych założeniach uzyskaliśmy także logarytmiczną dystorsję.

Nasza praca była motywowana słynnym twierdzeniem Yu [30] orzekającym, że przestrzenie zgrubnie zanurzalne w przestrzeń Hilberta spełniają zgrubną hipotezę Bauma–Connesa oraz przewidywaniem Druţu i Nowaka [9, Conjecture 6.7], że stożki nad działaniami z luką spektralną nie spełniają konkluzji tego twierdzenia. Przewidywanie to wynikało z wykazania w [9], że obrazy kolejnych potęg operatora Markowa przez wspomnianą wyżej reprezentację zbiegają do tzw. „rzutu-ducha", oraz faktu, że rzuty tego typu stały za wcześniejszymi kontrprzykładami na zgrubną hipotezę Bauma–Connesa.

Ostatni rozdział pracy potwierdza przewidywanie Druţu i Nowaka dowodząc – przy dodatkowych założeniach – że odwzorowanie indeksu (ang. *assembly map*) w zgrubnej hipotezie Bauma–Connesa nie jest epimorfizmem dla stożków nad działaniem z luką spektralną. Podajemy przykłady pokazujące, że część z tych założeń jest konieczna.

Ponadto, wspólny wynik z Nowakiem o niezanurzalności wzmacniamy – kosztem dodatkowych założeń – do stwierdzenia, że poziomy skręconego stożka nad działaniami z luką spektralną są superekspanderami i – co więcej – ich ekspansja względem ustalonej przestrzeni Banacha jest równoważna odpowiedniej luce dla wyjściowego działania. To wzmocnienie inspirowane jest pracą Vigolo [26], który uzyskał analogiczny wynik dla klasycznej luki spektralnej i klasycznych ekspanderów, używając odpowiednich izoperymetrycznych charakteryzacji obu pojęć (przypadek ogólny wymusza użycie nierówności Poincarégo).

Daje to w szczególności ekspandery względem wszystkich przestrzeni Banacha o nietrywialnym typie Rademachera. Na mocy [11] istnieje continuum działań spełniających założenia naszego wyniku i dających parami nierównoważne superekspandery. Można od nich dodatkowo wymagać, by były kontrprzykładami na zgrubną hipotezę Bauma–Connesa.

Thesis summary in English

In 2005 John Roe proposed a construction [22] that to an action of a finitely generated group on a compact metric space associates an unbounded metric space whose geometry results from an interplay of the action with the geometry of the initial compact space. The present work is devoted to studying relations of dynamical and ergodic properties of the action as well as properties of the acting group with metric properties of the resulting space, called the warped cone.

Warped cones were intended as a rich source of examples and counterexamples in large scale geometry: in order to obtain metric spaces of certain features, it suffices to identify a dynamical property of an action that implies these features for the associated warped cone, and then any action having this property will produce a desired example.

In particular Roe proved that amenable actions (including all actions of amenable groups), produce warped cones having property A [30], and measure preserving actions of groups without the Haagerup property produce warped cones non-embeddable into the Hilbert space [12]. In a joint work with Jianchao Wu [24] we managed to reverse both of these implications, simultaneously generalising the latter implication and its converse to the case of Banach spaces. For the equivalence to hold, one needs to replace the condition of coarse embed-

dability by so-called fibred coarse embeddability [7]. To this end we introduce the notion of linearisable actions, which turns out to have roots in the works Mostow from 60 years ago.

The above allows one to obtain many examples of spaces without property A yet fibred coarsely embeddable into the Hilbert space: any measure preserving action of a free group suffices because the free group is not amenable (so it cannot act in an amenable and measure-preserving way), yet has the Haagerup property.

However it does not determine whether there are warped cones without property A yet coarsely embeddable into the Hilbert space (which is a stronger condition than its 'fibred' generalisation). Four years ago this problem was the starting point of the present dissertation. The problem in a greater generality was extensively studied in the recent years, which includes significant contributions of Polish mathematicians. The first examples of coarsely embeddable metric spaces without property A (showing that the two properties are not equivalent) were found by Piotr W. Nowak in 2006 [17] and spectacular examples among groups were eventually constructed in a work of Damian Osajda [19] in 2014.

As it turns out, the above method of identifying a dynamical property yielding the desired warped cone does not suffice to solve the problem for warped cones. We offer an example of an action that—depending on the initial metric on the compact space acted upon—may produce an embeddable or non-embeddable warped cone. It is especially surprising in the light of equivalences like the ones concerning property A and fibred coarse embeddability mentioned above.

A solution can be found by reduction to a different instance of the problem. The period between [17,19] brought many works constructing embeddable spaces without property A, which were usually obtained as families of finite quotients of an infinite group [1,6,13,14,21]. The warped cone over a profinite completion of such a group (more precisely: over the inverse limit of such finite quotients) will contain the family quasi-isometrically and will exhibit similar properties. A question about such inclusion was raised by Pierre Pansu. It is especially important because of the extensive literature concerning such families of finite quotients (some keywords are 'Margulis-type expander' and 'box space').

The above inclusion allows in particular to reduce questions about the asymptotic dimension of such families studied in [8,10,25] to the recent results concerning the dimension (known as 'equivariant asymptotic dimension' or 'amenability dimension') of dynamical systems [3,25], in this case: of the action on a profinite completion. We use here a result of Wu and Zacharias relating both notions of dimension, which is a quantitative version of the above-mentioned equivalence between property A of the warped cone and the amenability of the action.

This result allowed us also to obtain a very much expected, yet not proved, fact that the dimension of a group action can be bounded above by the dimension of the action of a finite index subgroup. The proof uses a neat notion of 'coarsely n-to-1' maps [2,16], maps which are interestingly bijective in this case. However, most importantly—by applying a recent result of Yamauchi [29] and Hurewicz theorem for asymptotic dimension [4, 5]—we obtained upper bounds on the dimension of actions of virtually nilpotent groups and improved known bounds for nilpotent groups. In the case of actions on the Cantor set (of arbitrary groups), the new bounds agree with the lower bounds, giving a positive answer to a question of Willett.

The above results using Yamauchi's argument are closely related to the notion of 'piecewise property' introduced in the thesis and inspired by a question of Osajda about a characterisation of property A of a group via invariants of its finite quotients [20]. In addition to property A, piecewise properties enable characterisations of asymptotic dimension, hyperbolicity, or coarse embeddability into any Banach space. The idea is simple but it seems not to have appeared in the literature so far.

Piecewise properties may be useful whenever there is an asymptotically faithful map as introduced by Willett and Yu [28]. In the above-mentioned work with Jianchao Wu [24], we constructed such an asymptotically faithful Galois covering over a warped cone, showing in particular that the warped metric (that is, the metric on the warped cone) is a quotient metric coming from a relatively uncomplicated space (often the Cartesian product of the group and the appropriate infinite cone).

Such a covering, in the author's opinion, provides a convenient framework to study the coarse fundamental group, in analogy with the interrelation of the covering theory and fundamental group theory in the classical case. The thesis contains in particular a short calculation identifying the coarse fundamental group of a warped cone, however it does not contribute new results to the theory. Spectacular results here were obtained by D. Fisher, T. Nguyen, and W. van Limbeek [11], who proved quasi-isometric rigidity in homogeneous dynamics: two quasi-isometric warped cones must come from an almost the same action. It is a new direction compared to the extensive literature concerning quasi-isometric rigidity for groups and ergodic-theoretical rigidity for actions (orbit equivalence superrigidity or weak-star superrigitity).

The thesis contains a significantly easier version of the result of [11], valid under an additional (strong) assumption. The assumption is actually necessary: jointly with Dawid Kielak (in the appendix to [23]), we constructed a continuum of rotation actions on the circle yielding pairwise quasi-isometric warped cones. Moreover, we found examples of actions of non-quasi-isometric groups producing quasi-isometric warped cones. These examples allowed [11] to justify their technical assumptions (omitted in the above discussion).

Nonetheless, there are essential limitations on the geometry of two groups yielding quasi-isometric warped cones. We prove—in this case without special additional assumptions—that they have to be 'stably' quasi-isometric. As noticed by De Laat and Vigolo [15], this result enables differentiating levels of a warped cone from finite quotients of some groups by resorting to quasi-isometric rigidity of groups. On the other hand, for some warped cones—combining the above stable quasi-isometry with an appropriate isomorphism of coarse fundamental groups—Vigolo proved [27] that they cannot be quasi-isometric to finite quotients of any group. This gives in particular a formal confirmation that some super-expanders and counterexamples to the coarse Baum–Connes conjecture obtained in this thesis are quasi-isometrically different from previously known examples constructed as finite quotients.

We also prove that warped cones over actions on ultrametric spaces are not coarsely equivalent to any family of graphs (in particular to a family of finite quotients or finite Schreier graphs of a group), even though they are connected in an appropriate sense (c-chainable). It allows obtaining—for non-graphs—behaviour associated previously with expanders: coarse embeddability, logarithmic distortion, and violation of the coarse Baum–Connes conjecture.

The last part of the thesis is devoted to such behaviour. In the article introducing warped cones Roe points out [22] that the induced action on the warped cone is by translations, that is, there exists a uniform (for the action of a fixed group element) bound on the distance between a point and its image. This way we can obtain a representation of the group in operators of finite propagation (although not locally compact or at least pseudo-local, which causes difficulties in the context of the coarse Baum–Connes conjectures).

The spectral gap condition (Poincaré inequality) asserts that the norm of a function is comparable with the norm of its 'gradient' defined by means of such operators. If such functions came from a coarse embedding, their norms would have to increase with the diameter of a level of a warped cone, while their 'gradients' would have to stay bounded because of the finite propagation. Using this contradiction, together with Piotr W. Nowak [18] we proved coarse non-embeddability into different Banach spaces for warped cones over actions with spectral gaps. Under additional assumptions we obtained also the logarithmic distortion.

Our work was motivated by the celebrated theorem of Yu [30] stating that spaces coarsely embeddable into the Hilbert space satisfy the coarse Baum–Connes conjecture and a prediction of Druţu and Nowak [9, Conjecture 6.7] that warped cones over actions with a spectral gap do not satisfy the conclusion of this theorem. The prediction was based on proving in [9] that images of consecutive powers of the Markov operator by the above-mentioned representation converge to a so-called 'ghost projection' and the fact that projections of this kind underlay earlier counterexamples to the coarse Baum–Connes conjecture.

The last chapter of the thesis confirms the prediction of Druţu and Nowak, proving—under additional assumptions—that the assembly map in the coarse Baum–Connes conjecture is not surjective for warped cones over actions with a spectral gap. We provide examples showing that some of these assumptions are necessary.

We also strengthen the joint result with Nowak on non-embeddability—at the price of additional assumptions—to a statement that levels of a warped cone over actions with a spectral gap are super-expanders and moreover their expansion with respect to a fixed Banach space is equivalent to an appropriate spectral gap for the initial action. This strengthening is inspired by a work of Vigolo [26], who obtained the analogous result for the classical spectral gap and classical expanders, using the isoperimetric characterisations of both notions (the general case requires the usage of Poincaré inequalities).

In particular, this yields expanders with respect to all Banach spaces of non-trivial Rademacher type. By [11] there exists a continuum of actions satisfying the assumptions of our result and giving pairwise non-equivalent super-expanders. They can be additionally required to be counterexamples to the coarse Baum–Connes conjecture.

Literatura

[1] G. Arzhantseva, E. Guentner, and J. Špakula, *Coarse non-amenability and coarse embeddings*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), 22–36, DOI 10.1007/s00039-012-0145-z.

[2] K. Austin and Ž. Virk, *Higson compactification and dimension raising*, Topology Appl. **215** (2017), 45–57.

[3] A. Bartels, *Coarse flow spaces for relatively hyperbolic groups*, Compos. Math. **153** (2017), no. 4, 745–779, DOI 10.1112/S0010437X16008216.

[4] G. C. Bell and A. N. Dranishnikov, *A Hurewicz-type theorem for asymptotic dimension and applications to geometric group theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 11, 4749–4764.

[5] N. Brodskiy, J. Dydak, M. Levin, and A. Mitra, *A Hurewicz theorem for the Assouad-Nagata dimension*, J. Lond. Math. Soc. (2) **77** (2008), no. 3, 741–756, DOI 10.1112/jlms/jdn005.

[6] C. Cave, Dreesen D., and A. Khukhro, *Embeddability of generalized wreath products and box spaces*, available at arXiv:1307.3122.

[7] X. Chen, Q. Wang, and G. Yu, *The maximal coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a fibred coarse embedding into Hilbert space*, Adv. Math. **249** (2013), 88–130, DOI 10.1016/j.aim.2013.09.003.

[8] T. Delabie and M. C. H. Tointon, *The asymptotic dimension of box spaces of virtually nilpotent groups*, Discrete Math. **341** (2018), no. 4, 1036–1040, DOI 10.1016/j.disc.2017.12.009.

[9] C. Druţu and P. Nowak, *Kazhdan projections, random walks and ergodic theorems* (2015), available at arXiv:1501.03473.

[10] M. Finn-Sell and J. Wu, *The Asymptotic Dimension of Box Spaces for Elementary Amenable Groups* (2015), available at arXiv:1508.05018.

[11] D. Fisher, T. Nguyen, and W. van Limbeek, *Rigidity of warped cones and coarse geometry of expanders*, available at arXiv:1710.03085.

[12] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, pp. 1–295.

[13] A. Khukhro, *Box spaces, group extensions and coarse embeddings into Hilbert space*, J. Funct. Anal. **263** (2012), no. 1, 115–128, DOI 10.1016/j.jfa.2012.04.004.

[14] A. Khukhro, *Embeddable box spaces of free groups*, Math. Ann. **360** (2014), 53–66, DOI 10.1007/s00208-014-1029-3.

[15] T. de Laat and F. Vigolo, *Superexpanders from group actions on compact manifolds*, available at arXiv:1707.01399v1.

[16] T. Miyata and Ž. Virk, *Dimension-raising maps in a large scale*, Fund. Math. **223** (2013), no. 1, 83–97.

[17] P. W. Nowak, *Coarsely embeddable metric spaces without Property A*, J. Funct. Anal. **252** (2007), no. 1, 126–136, DOI 10.1016/j.jfa.2007.06.014.

[18] P. W. Nowak and D. Sawicki, *Warped cones and spectral gaps*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 2, 817–823, DOI 10.1090/proc/13258.

[19] D. Osajda, *Small cancellation labellings of some infinite graphs and applications* (2014), available at arXiv:1406.5015.

[20] D. Osajda, *Residually finite non-exact groups*, available at arXiv:1703.03791v1. To appear in GAFA.

[21] M. I. Ostrovskii, *Low-distortion embeddings of graphs with large girth*, J. Funct. Anal. **262** (2012), no. 8, 3548–3555.

[22] J. Roe, *Warped cones and property A*, Geom. Topol. **9** (2005), 163–178, DOI 10.2140/gt.2005.9.163.

[23] D. Sawicki, *Warped cones, (non-)rigidity, and piecewise properties, with a joint appendix with Dawid Kielak*, arXiv:1707.02960 (2017).

[24] D. Sawicki and J. Wu, *Straightening warped cones*, available at arXiv:1705.06725v1.

[25] G. Szabó, J. Wu, and J. Zacharias, *Rokhlin dimension for actions of residually finite groups*, available at arXiv:1408.6096. To appear in Ergodic Theory Dynam. Systems.

[26] F. Vigolo, *Measure expanding actions, expanders and warped cones*, available at arXiv:1610.05837v1. To appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[27] F. Vigolo, *Discrete fundamental groups of Warped Cones and expanders*, available at arXiv:1710.04955v1.

[28] R. Willett and G. Yu, *Higher index theory for certain expanders and Gromov monster groups, I*, Adv. Math. **229** (2012), no. 3, 1380–1416, DOI 10.1016/j.aim.2011.10.024.

[29] T. Yamauchi, *Hereditarily infinite-dimensional property for asymptotic dimension and graphs with large girth*, Fund. Math. **236** (2017), no. 2, 187–192, DOI 10.4064/fm266-6-2016.

[30] G. Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), no. 1, 201–240, DOI 10.1007/s002229900032.