RECENZJA PRACY DOKTORSKIEJ ”RANKS OF TENSORS, RELATED VARIETIES AND RANK ADDITIVITY PROPERTY FOR SMALL CASES” MGR. FILIPA RUPNIEWSKIEGO.

Rozprawa jest poświęcona pojęciom rangi i rangi brzegowej tensorów, oraz związanych z nimi rozmaitościami siecznych i rozmaitościami kaktusowymi.

Dziedzina ta ostatnio rozwijała się dość intensywnie i wiąże się z wieloma działami nauk, np. analizą numeryczną, numeryczną algebrą liniową,algebraiczną teorią złożoności, przetwarzaniem sygnałów, wizją komputerową, eksploracją danych, neurobiologią itp.

W obecnej rozprawie autor dowodzi dwóch rodzajów rezultatów. Pierwszy to badanie tzw. addytywności rang, czyli sprawdzanie czy ranga sumy prostej dwóch tensorów jest równa sumie rang składników prostych. Problem ten jest znany jako przypuszczenie Strassena o addytywności rang. Zagadnienie zostało rozwiązane negatywnie w 2019 roku przez Shitova, ale jego kontrprzykład nie jest konstruktywny więc pozostaje problem znalezienia najmniejszego kontrprzykładu. Autor bada także podobne przypuszczenie Strassena dotyczące rang brzegowych.

Głównymi rezultatami są tutaj Twierdzenie 1.2.5.7 i Twierdzenie 1.2.6.1.

Twierdzenie 1.2.5.7 dowodzi prawdziwości przypuszczenia Strassena o addytywności rang w kilku małych przypadkach: m. in. gdy ranga jednego ze składników jest ≤ 6 lub ranga obydwu składników jest ≤ 7.

Twierdzenie 1.2.6.1 dowodzi prawdziwości przypuszczenia Strassena dla rang brzegowych dla tensorów w przestreni $A \otimes B \otimes C$ gdzie wymiary A, B, C są ≤ 4.

Jeśli chodzi o rozmaitości siecznych i kaktusów, sytuacja jest następująca. Tensory rangi brzegowej $\leq r$ mogą być scharakteryzowane jako tensory z r-tej rozmaitości siecznych produktu przestrzeni rzutowych wlłożonego przez włożenie Segre. Wielu autorów próbowało znaleźć równania opisujące te rozmaitości siecznych teoriomnogościowo. Jednak okazało się, że wszystkie te równania znikają także na większej rozmaitości kaktusów. Jeśli chodzi o definicję rozmaitości kaktusowych, odsyłam do rozprawy. Rozmaitość ta prowadzi do pojęcia rangi kaktusowej i brzegowej rangi kaktusowej.

Jest więc interesującym problemem zbadanie kiedy rozmaitość siecznych i rozmaitość kaktusów są takie same i jak się różnią w najmniejszych wypadkach gdy istotnie są różne.

Autor dowodzi trzech rezultatów tego rodzaju. Twierdzenie 1.3.1.1 mówi, że dla 14-tej rozmaitości siecznych d-tego włożenia Veronese przestrzeni rzutowej ($d \geq 5$) odpowiednia rozmaitość kaktusów ma dwie składowe nieprzywiedlne: rozmaitość siecznych rozmaitość wielomianów podzielnych przez $(d-3)$-cią potęgę formy liniowej.

W Twierdzeniu 1.3.1.3 autor dowodzi podobnego rezultatu dla Grassmannianowej rozmaitości siecznych $\sigma_{8,3}$ dla d-tego włożenia Veronese ($d \geq 5$). Dodatkowa składowa nieprzywiedlna składa się z podprzestrzeni 3-wymiarowych wielomianów stopnia d gdzie każdy element jest podzielny przez $(d-2)$-gą potęgę formy liniowej.

Ważnym krokiem w dowodzie powyższych twierdzeń jest Twierdzenie 1.3.1.4 opisujące rangę kaktusową i brzegową rangę kaktusową dla tensorów symetrycznych podzielnych przez wysoką potęgę formy liniowej. Twierdzenie 1.3.1.5 dowodzi podobnego rezultatu dla Grassmannianowych rank kaktusowych i brzegowych rang kaktusowych.

Metody stosowane do uzyskania tych rezultatów są bardzo różnorodne. Mamy tu metody geometryczne oparte na pojęciu plastra tensora d-wymiarowego, oraz związanego z nim pojęcia rangi podrzestrzenie liniowej produktu tensorowego przestrzeni. Pozwala to zredukować badanie tensorów d-wymiarowych do $d-1$-wymiarowych. Stosowane są też metody algebry przemiennej: ideały apolarne i schematy Hilberta, w sytuacji algebr z wielogradacją.

Rezultaty o addytywności rang są dowodzone za pomocą szeregu bardzo pomysłowych redukcji, uzyskanie tych rezultatów było niełatwe i jest dużym osiągnięciem.

Uzyskane rezultaty oceniam jako znaczące i interesujące. Zwłaszcza pojawienie sie rozmaitości wielomianów podzielnych przez potęgę formy liniowej jest dla mnie nieoczekiwane i zasługuje na dalsze zbadanie i głębsze zrozumienie. Autor pokazał znajomość wielu zróżnicowanych technik i umiejętnie się nimi posłużył . Trzeba jednak powiedzieć, że są to metody specjalne, więc raczej nie uogólnią się one na tensory w produktach przestrzeni większych wymiarów.

Rezultaty rozprawy są oparte na rezultatach dwóch prac: wspólnej pracy z J. Buczyńskim i E. Postinghel ”On Strassen rank additivity for small three-way tensors, SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications, 41(1):106-133, 2020 i wspólnej pracy z M. Gałązką i T. Mańdziukiem ”Distinguishing secant cactus varieties”, arXiv 2007.16203, 2020. Powstaje pytanie o samodzielność rozprawy.

Jednak widać, że podejście jest w wielu miejscach ulepszone i rezultaty są pogłębione, co jest na pewno oryginalnym wkładem autora.

Nie mam więc wątpliwości, że indywidualny wkład autora jest wystarczający.

Rozprawa jest napisana dobrze, wszystkie pojęcia są przystępnie wprowadzone. Nie jest jednak łatwa w czytaniu z powodu różnorodności stosowanych technik. Ale taka jest natura tego materiału i nie można tu winić autora.

Rozprawa spełnia więc według mnie wszystkie warunki art. 13 ust. 1 Ustawy z dn. 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym. Uznaję ją za bardzo dobrą.

Jerzy Weyman