Streszczenie pracy doktorskiej Filipa Rupniewskiego pt. „Rangi tensorów, związane z nimi rozmaitości oraz własność addytywności rangi w małych przypadkach”

Rozprawa dotyczy rang tensorów. Głównymi tematami pracy są ranga tensorowa, brzegowa ranga tensorowa, ranga kaktusowa oraz związane z nimi rozmaitości, tj. rozmaitość siecznych i rozmaitość kaktusowa.

W przypadku pierwszych dwóch rodzajów rang analizujemy problem addytywności ze względu na sumę prostą dla dwóch niezależnych tensorów (rzędu 3) $p' \in A' \otimes B' \otimes C'$, $p'' \in A'' \otimes B'' \otimes C''$. Badamy, czy ranga (brzegowa) ich sumy prostej jest równa sumie poszczególnych rang (brzegowych). Dla tensorów rzędu 2 (macierzy) ranga tensora jest równa rzędowi odpowiadającej macierzy oraz zachodzi addytywności rangi. W przypadku tensorów większego rzędu pozytywna odpowiedź na zagadnienie addytywność rangi tensorowej była znana jako hipoteza Strassena (1973). Została ona obalona przez Shitova (2019). Jednak jego dowód nie jest konstruktywny i wciąż jeszcze żaden konkretny kontrprzykład nie jest znany.

W pracy doktorskiej dowodzimy, że dla pewnych małych tensorów rzędu 3 addytywność rangi tensorowej zachodzi. Dzieje się tak na przykład, gdy tensor p'' jest treściwy oraz jego ranga jest mniejsza lub równa wymiarowi przestrzeni A'' powiększonemu o 2. Zachodzi ona również gdy $p'' \in A'' \otimes (B'' \otimes \mathbb{k}^1 + \mathbb{k}^2 \times C'')$. Jeżeli ograniczymy ciało bazowe do liczb rzeczywistych lub zespolonych, warunkiem wystarczającym na addytywność jest, żeby wymiary obu przestrzeni B'' oraz C'' były równe 3. W przypadku gdy $p' \in \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^3$ i $p'' \in \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^3$ lub $p' \in \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^3$ i $p'' \in \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^4$ również zachodzi addytywność. Jest tak też, gdy ciałem bazowym są liczby zespolone oraz ranga p'' jest mniejsza niż 7. Stąd, para tensorów mnożenia macierzy 2×2 ma własność addytywności rangi. Daje to negatywną odpowiedź na pytanie o istnienie szybszego algorytmu mnożenia dwóch par macierzy 2×2. Optymalnym sposobem jest niezależnie od siebie pomnożyć pierwszą parę, a następnie drugą.

Badamy również przypadki addytywności rangi brzegowej wspomnianych tensorów. W szczególności pokazujemy, że zachodzi ona, gdy suma prosta tensorów jest zawarta w $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$.

Tensory ustalonej rangi brzegowej tworzą rozmaitość siecznych. Jej uogólnieniem jest rozmaitość kaktusowa. Definiuje się ją przy pomocy przestrzeni liniowych rozpiętych przez dowolne skończone schematy ograniczonej długości, podczas gdy rozmaitość siecznych jest zdefiniowana przy pomocy tylko izolowanych zredukowanych punktów. W szczególności każda rozmaitość siecznych jest zawsze zawarta w odpowiadającej jej rozmaitości kaktusowej. Poza kilkoma początkowymi przykładami (gdy długość jest mała) zawieranie jest ścisłe. Dużo naturalnych kryteriów na bycie punktem rozmaitości siecznych sprawdza jedynie przynależność do rozmaitości kaktusowej. W rozprawie prezentujemy technikę, która jako pierwsza pozwala na odróżnianie rozmaitości

siecznych od rozmaitości kaktusowej. Nasza metoda działa w przypadku rozmaitości kaktusowej zdefiniowanej dla rozmaitości Veronese $\nu_d(\mathbb{P}^n)$. Podajemy algorytm stwierdzający, czy punkt rozmaitości kaktusowej $\kappa_{14}(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ należy do rozmaitości siecznych $\sigma_{14}(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ dla $6 \leq d$ i $6 \leq n$. Przedstawiamy także podobny rezultat dla rozmaitości kaktusowej Grassmanna $\kappa_{8,3}(\nu_d(\mathbb{P}^n))$.

Narzędziem, którego wielokrotnie używamy w części dotyczącej addytywności rangi (brzegowej) jest tzw. technika plastrów. Mówi ona, że ranga (brzegowa) tensora $p \in \mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^l \otimes \mathbb{C}^m$ jest równa randze (brzegowej) obrazu przekształcenia liniowego $(\mathbb{C}^k)^* \to \mathbb{C}^l \otimes \mathbb{C}^m$ zadanego przez p. Podajemy przykłady świadczące o tym, że technika plastrów w przypadku rangi kaktusowej i brzegowej rangi kaktusowej nie działa. W pewnym sensie nasze kontrprzykłady są najmniejszymi możliwymi do uzyskania.

Słowa kluczowe: ranga tensorowa, addytywność rangi tensorowej, hipoteza Strassena, plastry tensorów, rozmaitość siecznych, ranga brzegowa, rozmaitość kaktusowa, ranga kaktusowa, schemat Hilberta, abiegunowość

klasyfikacja AMS MSC 2020: 15A69, 14N07, 14M17, 15A03, 14C05, 68W30