

Some problems in noncommutative analysis

Haonan ZHANG

Streszczenie

Niniejsza rozprawa dotyczy pewnych zagadnień nieprzemiennej analizy. Składa się z czterech części, omawiających problemy sięgające od grup kwantowych i nieprzemiennej analizy harmonicznej po teorię kwantowej informacji. W pierwszej części wyznaczamy wszystkie stany idempotentne na grupach kwantowych Sekine, rozwiązując pewien układ równań przy pomocy metod algebry liniowej i elementarnej teorii liczb. Udzielamy tym samym odpowiedzi na pytanie zadane przez Franza i Skalskiego w 2009 roku.

W drugiej części badamy stany nieskończenie podzielne na skończonych grupach kwantowych, czyli stany posiadające n -te pierwiastki dla każdego $n \geq 1$. Pokazujemy, że każdy stan nieskończenie podzielny na skończonej grupie kwantowej jest typu Poissona, czyli posiada przedstawienie jako eksponent względem pewnego stanu idempotentnego.

Trzecia część zawiera pewne dostateczne warunki na L^p -ograniczoność mnożników Fouriera na algebrach von Neumanna grup dyskretnych. Wcześniej znano niewiele wyników tego typu; nowy pomysł w rozprawie polega na tym, że w przypadku dyskretnym wystarczy rozważać mnożniki $L^p - L^q$.

Wreszcie w czwartej części, dotyczącej teorii kwantowej informacji, dowodzimy hipotezy Carlena, Franka i Lieba (implikującej słabszą hipotezę Adenauerta i Datty). Innymi słowy charakteryzujemy wszystkie pary (α, z) dla których α - z entropia Rényi zachowuje się monotonicznie względem działania odwzorowań całkowicie dodatnich zachowujących ślad, a więc spełnia nierówność przetwarzania danych. Kluczowym elementem dowodu jest modyfikacja szeroko stosowanej metody wariacyjnej. Pozwala ona również uzyskać proste dowody wielu znanych wcześniej wyników.

Słowa kluczowe

Zwarte grupy kwantowe, skończone grupy kwantowe, stany idempotentne, stany nieskończenie podzielne, stany Poissona, nieprzemienne przestrzenie L^p , nieprzemienne przestrzenie Lorentza, algebry von Neumanna grup, mnożniki Fouriera, α - z entropia Rényi, nierówność przetwarzania danych, łączna wypukłość/wklęsłość.

Abstract

This PhD thesis is devoted to the study of some problems in noncommutative analysis. It consists of four parts, ranging from quantum groups and noncommutative harmonic analysis to quantum information. Firstly, we decide all the idempotent states on Sekine quantum groups, which is achieved by solving a system of equations using linear algebras and elementary number theory. This answers a question of Franz and Skalski stated in 2009. Secondly, we study the infinitely divisible states on finite quantum groups, i.e., states that admit n -th root for all $n \geq 1$. We show that every infinitely divisible state on a finite quantum group is of Poisson type, that is, it can be represented as an exponential relative to some idempotent state. Thirdly, we give two sufficient conditions for boundedness of L_p -Fourier multipliers on discrete group von Neumann algebras. Very few of such results were known before. Our idea is the observation that in the discrete case it suffices to consider L_p - L_q Fourier multipliers. Finally, in the area of quantum information, we confirm a conjecture of Carlen, Frank and Lieb (and then a weaker conjecture of Audenaert and Datta). As a consequence, we identify all the pairs (α, z) such that the α - z Rényi relative entropy is monotone under completely positive trace preserving maps, or satisfies Data Processing Inequality. The key part of the proof is a modification of a widely-used variational method. Its power yields simple proofs of many known results.

Keywords

Compact quantum groups, finite quantum groups, idempotent states, infinitely divisible states, Poisson states, noncommutative L_p -spaces, noncommutative Lorentz spaces, group von Neumann algebra, Fourier multipliers, α - z Rényi relative entropy, data processing inequality, joint convexity/concavity.
