Ground state, bound state, and normalized solutions to semilinear Maxwell and Schrödinger equations

Jacopo Schino

Streszczenie

Niniejsza rozprawa doktorska dotyczy istnienia rozwiązań półliniowych równań eliptycznych i jest podzielona na dwie części, dotyczące odpowiednio problemów bez ograniczenia i z ograniczeniem. Rozdział 1 zawiera szereg odwołań do pojęć i własności używanych w tej pracy i zaprezentowany jest przed wspomnianym podziałem na części.

W Części I badamy istnienie i wielokrotność rozwiązań równania postaci

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = f(x, \mathbf{U}), \quad \mathbf{U} \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N,$$

gdzie $N \geq 3$ oraz $f = \nabla F \colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ jest gradientem (ze względu na $\mathbf{U}$) danej nieliniowej funkcji $F \colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Tutaj, gdy $N \geq 4$, $\nabla \times \nabla \times \mathbf{U}$ jest zdefiniowane przy użyciu tożsamości $\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \Delta \mathbf{U}$ zachodzącej, gdy $N = 3$. Takie problemy są znane jako problemy *curl-curl* i powstają, gdy $N = 3$, z nieliniowych równań Maxwella przy braku ładunków elektrycznych, prądów elektrycznych i magnetyzacji. Główną trudnością jest fakt, że jądro operatora różniczkowego $\nabla \times \nabla \times$ składa się z podprzestrzeni pól gradientowych i dlatego jest nieskończenie wymiarowe. Historycznie rzecz biorąc, dwa podejścia były stosowane do rozwiązywania problemów curl-curl za pomocą metod wariacyjnych i oba wykorzystywały bezdywergencyjne pola wektorowe. Powodem był fakt, że $\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = -\Delta \mathbf{U}$ dla każdego pola bezdywergencyjnego $\mathbf{U}$, a wektorowy Laplacian jest łatwiejszym w stosowaniu operatorem różniczkowym.

W rozdziale 2 podajemy dokładne fizyczne wyprowadzenie problemu curl-curl, a następnie przywołujemy ważne wyniki z ostatnich dziesięcioleci, od pierwszych prac do najnowszych wyników, w tym zilustrowanych w tej rozprawie doktorskiej.

W rozdziale 3 opartym na [3], skupiamy się na fizycznie istotnym przypadku $N = 3$. Nieliniowość F jest kontrolowana od góry i od dołu przez odpowiednią regularną (ang. *nice*) funkcję Younga: w szczególności nadkrytyczną w zerze, podkrytyczną w nieskończoności w sensie wykładnika Sobolewa, ale superkwadratową w nieskończoności i spełniającą globalne warunki Δ_2 i ∇_2. Nasze podejście wykorzystuje dekompozycję typu Helmholtza przestrzeni funkcyjnej z

którą pracujemy, na podprzestrzeń bezdywergencyjną i podprzestrzeń bezwirową (wspomniane jądro), tj. $u = v + w$, gdzie $\nabla \cdot v = \nabla \times w = 0$ i para (v, w) jest jednoznacznie określona; następnie budujemy homeomorfizm z poprzedniej podprzestrzeni do pewnej topologicznej podrozmaitości (całej przestrzeni) zawierającej wszystkie nietrywialne rozwiązania. To w pewien sposób pozwala nam pracować tylko z bezdywergencyjną podprzestrzenią, chociaż trzeba zadbać o tę część bezwirową. W rzeczywistości to właśnie powoduje najwięcej trudności w stosowanych przez nas metodach. Udowadniamy istnienie rozwiązania o najmniejszej energii oraz, jeśli f jest nieparzyste, istnienie nieskończenie wielu różnych rozwiązań. W przeciwieństwie do Rozdziału 4 nie używamy żadnych symetrii; w szczególności podajemy pierwsze wyniki dotyczące wielokrotności rozwiązań problemu curl-curl na nieograniczonej dziedzinie bez złożeń o symetrii.

W rozdziale 4 bazującym na [1], rozważymy przypadek ogólny $N \geq 3$. Przy pewnych założeniach dotyczących symetrii nieliniowości, wykorzystujemy odpowiednie działania grupowe, aby zredukować problem curl-curl do równania Schrödingera z potencjałem osobliwym

$$-\Delta u + \frac{a}{|y|^2} u = \tilde{f}(x, u), \quad u \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},$$

gdzie $x = (y, z) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{N-K}$, $K = 2$ i $a = 1$, badając również przypadek ogólny $2 \leq K < N$ oraz $a > -(K/2 - 1)^2$. Mówiąc bardziej szczegółowo, wymagamy, aby $f(\cdot, \alpha w) = \tilde{f}(\cdot, \alpha) w$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ i każdego $w \in \mathbb{S}^{N-1}$ oraz $\tilde{f}(gx, \cdot) = \tilde{f}(x, \cdot)$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^N$ i dla każdego $g \in \mathcal{SO}(2) \times \{I_{N-2}\}$. Rozszerzając do przypadku słabych rozwiązań dobrze znaną równoważność klasycznych rozwiązań obu problemów za pomocą wzoru $\mathbf{U}(x) = u(x)/|y|(-x_2, x_1, 0)$, dowodzimy nowych wyników istnienia (rozwiązania nietrywialne, rozwiązania o najmniejszej energii wśród rozwiązań o tej samej symetrii, nieskończenie wiele różnych rozwiązań) w obu problemach, zarówno w przypadkach krytycznych jak i niekrytycznych w sensie wykładnika Sobolewa; w szczególności pracujemy z równaniem curl-curl w poprzednim przypadku, używając tej samej maszynerii symetrii, aby zredukować $\nabla \times \nabla \times \mathbf{U}$ do $-\Delta \mathbf{U}$ oraz z równaniem Schrödingera w tej ostatniej sytuacji. Najbardziej znaczącym rezultatem jest istnienie, gdy $N = 3$, rozbieżnego ciągu rozwiązań w krytycznym przypadku. Wynik ten uzyskamy za pomocą innego działania grupowego, które daje nam zwartość problemu; to jest pierwszy wynik dotyczący wielokrotności rozwiązań problemu curl-curl na nieograniczonej dziedzinie w wykładnikiem krytycznym Sobolewa. Odnośnie istnienia rozwiązań w niekrytycznym przypadku, rozwiązania o najmniejszej energii oraz nieskończenie wiele różnych rozwiązań uzyskujemy wykorzystując abstrakcyjną teorię punktów krytycznych zbudowaną w rozdziale 3.

W Części II szukamy rozwiązań o najmniejszej energii dla autonomicznego układu równań Schrödingera w postaci

$$\begin{cases} -\Delta u_j + \lambda_j u_j = \partial_j F(u) \\ \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \, dx = \rho_j^2 \end{cases} \quad \forall j \in \{1, \ldots, K\}, \quad u \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K,$$

gdzie $N, K \geq 1$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_K) \in]0, \infty[^K$ jest dane, oraz $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K) \in \mathbb{R}^K$ jest wielkością nieznaną. Rozwiązania takich problemów określane są jako *unormowane* ze względu na ograniczenia L^2, które powodują, że λ pojawia się jako K-krotka mnożników Lagrange'a. Równania tego typu pojawiają się podczas poszukiwania rozwiązań fali stojącej dla podobnych problemów zależnych od czasu i pochodzą z takich dziedzin fizyki, jak nieliniowa optyka i kondensacja Bosego-Einsteina. Ich waga polega na fizycznym znaczeniu masy (normy L^2 podniesionej do kwadratu) oraz fakcie, że wielkości te są zachowywane w czasie w odpowiednich równaniach ewolucji.

W rozdziale 5 wprowadzamy problem, krótko komentujemy niektóre nowatorskie artykuły i inne wyniki w literaturze oraz podajemy przydatne preliminaria.

W zależności od założeń dotyczących F, a czasami wartości ρ, powiązana funkcja energetyczna wykazuje różne zachowania: może być ograniczona od dołu dla wszystkich, niektórych lub żadnych wartości ρ i te przypadki są znane odpowiednio jako masowo podkrytyczne, -krytyczne i -nadkrytyczne. Pierwsze dwa przypadki są omówione w rozdziale 6 bazującym na pracy [4], a ostatnie w rozdziale 7 bazują na [2]. W obu przypadkach rozważamy ciąg minimalizujący dla funkcjonału energii i wypracowujemy odpowiednie założenia takie, aby ten ciąg był zbieżny do rozwiązania układu równań. W przypadku masowo nadkrytycznym funkcjonał jest nieograniczony od dołu i ograniczamy go do rozmaitości naturalnej, określonej przez odpowiednią liniową kombinację tożsamości Nehariego i Pohožaeva, aby pozbyć się nieznanej wielkości λ – wówczas uzyskujemy ograniczenie funkcjonału z dołu. Wynik składa się z rozwiązania o najmniejszej energii wśród funkcji o tej samej symetrii lub w ogólnym sensie w zależności od struktury nieliniowości.

Nowość tego podejścia polega na rozważeniu kul przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^N)$

$$\left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid |u|_2 \leq \rho_j \right\}, \quad j \in \{1, \dots, K\}$$

zamiast sfer przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^N)$

$$\left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid |u|_2 = \rho_j \right\}, \quad j \in \{1, \dots, K\}$$

i pozwala pracować ze słabo domkniętym podzbiorem i mieć, a priori, dodatkowe informacje o znaku składowych λ, które wynikają z faktu, że ograniczenia są wyznaczane przez nierówności, a punkty krytyczne, które otrzymujemy, są punktami minimalnymi.

Jeśli $K \geq 2$, to potrzebujemy konkretnych założeń dotyczących nieliniowości, aby skorzystać z symetryzacji Schwarza; niemniej jednak nadal możemy zajmować się raczej ogólnymi funkcjami, co jest nowością w przypadku układów.

Ostatecznie, Rozdział 8 zawiera nowe wyniki i dotyczy unormowanych rozwiązań zarówno problemów curl-curl jak i nieautonomicznych równań Schrödingera z potencjałem osobliwym, jak w rozdziale 4, jednak zawsze z autonomicznymi nieliniowościami. Takie wyniki uzyskuje się łącząc symetrię oraz równoważność z rozdziału 4 z wynikami z rozdziałów 6 oraz 7. W szczególności symetria pozwala nam zredukować problem curl-curl do autonomicznego równania Schrödingera z niewiadomą o wartościach wektorowych z pojedynczym ograniczeniem L^2, które badamy bezpośrednio, podczas gdy równoważność zapewnia analogiczne wyniki dla równania Schrödingera o wartości skalarnej z potencjałem osobliwym. Ponownie otrzymujemy rozwiązania o najmniejszej energii wśród rozwiązań o tej samej symetrii.

Literatura

[1] M. Gaczkowski, J. Mederski, J. Schino, *Multiple solutions to cylindrically symmetric curl-curl problems and related Schrödinger equations with singular potentials*, arXiv:2006.03565v2.

[2] J. Mederski, J. Schino: *Least energy solutions to a cooperative system of Schrödinger equations with prescribed L^2-bounds: at least L^2-critical growth*, arXiv:2101.02611.

[3] J. Mederski, J. Schino, A. Szulkin: *Multiple solutions to a semilinear curl-curl problem in* $\mathbb{R}^3$, Arch. Ration. Mech. Anal. **236** (2020), no. 1, 253–288.

[4] J. Schino: *Normalized ground states to a cooperative system of Schrödinger equations with generic L^2-subcritical or L^2-critical nonlinearity*, arXiv:2101.03076.