Wrocław, 19. maja 2016 r.

Światosław Gal
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
sgal@math.uni.wroc.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej Karola Srzałkowskiego
Lipschitzowska objętość symplicjalna

Rozprawa pana Karola Srzałkowskiego dotyczy pewnego wariantu, zdefiniowanego dla zupełnych rozmaitości Riemannowskich, pojęcia symplicjalnej objętości.

Objętość symplicjalna i sumowalne homologie dla zwartych rozmaitości zdefiniowane i badane przez Gromowa znalazły zastosowania w topologii algebraicznej oraz m.in. dla nowego dowodu twierdzenia o sztywności Mostowa, o czym Kandydat szeroko pisze we wstępie do rozprawy. Naiwne rozszerzenie definicji na otwarte rozmaitości jest raczej bezużyteczne (np. objętość symplicjalna na tendencję do znikania). Autor rozprawy rozwija subtelniejszy wariant tego pojęcia (zasugerowany już przez Gromowa) w kategorii zupełnych rozmaitości i właściwych lipschitzowskich odwzorowań.

Najważniejszymi wynikami w pracy są twierdzenia A–D, czyli oszacowanie objętości lipschitzowskiej zależnie od krzywizny (A), szacowania produktowe (B), zasada proporcjonalności (C), oraz znikanie objętości lipschitzowskiej gdy grupa podstawowa jest średniowalna (D). Te podstawowe własności objętości symplicjalnej zwartych rozmaitości nie zachodzą dla „naiwnego" uogólnienia tego pojęcia na niezwarty przypadek.

Twierdzenia A oraz D, jak podkreślono w rozprawie, są znane specjalistom, jednak nie zostały dotąd spisane w żadnej publikacji.

Twierdzenia B oraz C uogólniają wyniki Löh i Sauera (którzy udowodnili twierdzenia B i C dla niedodatnio zakrzywionych rozmaitości).

Główny techniczny wysiłek w pracy jest włożony zdefiniowanie procedury prostowania sympleksów. Jest ona wariacja pomysłu używanego w pracach Gromowa dla niedodatnio zakrzywionych rozmaitości, gdzie można bez żadnych trudności technicznych prostować sympleksy korzystając z jedyności geodezyjnych w nakryciu uniwersalnym.

Doktorant dowodzi, że istnieje procedura, nazwana przez niego „kawałkowym prostowaniem sympleksów", która pozwala na udowodnienie wyżej wspomnianych rezultatów.

W skrócie można ją opisać następująco. Dokonując dostatecznie wielu podrozbić barycentrycznych otrzymujemy sympleksy na tyle małe, że nie zawierają punktów sprzężonych. Niestety nie można wnioskować, że minimizujące geodezyjne (np. między wierzchołkami) są jedyne.

Ponieważ jednak w otoczeniu sympleksu nie ma par punktów sprzężonych, odwzorowanie eksponencjalne jest lokalnym dyfeomorfizmem na otoczeniu dostatecznie dużym, żeby jego obraz zawierał szukane otoczenie sympleksu. Innymi słowy nakrycie uniwersalne tego otoczenia ma promień injektywności na tyle duży, że interesujące nas minimizujące geodezyjne są jedyne.

Procedura ta wymaga od Doktoranta zmierzenia się z szeregiem trudności technicznych.

W preprincie, zeponowanym w bazie ARXIV.ORG nieco później niż pierwsza wersja pracy Strzałkowskiego F. Franceschini pokazał niekonstruktywnie, że łańcuchy można kawałkowo prostować bez założenia ograniczenia na krzywiznę. Technika pana Strzałkowskiego ma zaletę jawności, polegającą na technicznym sformalizowaniu klarownej geometrycznej intuicji opisanej powyżej.

Dziwi mnie, dlaczego pan Strzałkowski, który dziękuje Franceschiniemu za „bardzo interesujące uwagi o jego [Francheskiniego] pracy" nie dyskutuje na czym polega różnica w podejściu do problemu prostowania sympleksów i dlaczego Franceschiniemu udało się udowodnić silniejsze wersje twierdzeń B i C (wersje bez założeń krzywiznowych).

Jakkolwiek praca pana Strzałkowskiego w dużej mierze jest równoległa do pracy Löh i Sauera, to jego wyniki wymagały uważnego udowodnienia wielu ich wyników przy dużo słabszych założeniach.

Kandydat w pełni opanował techniki i pojęcia „klasycznej" teorii sumowalnych homologii (i dualnie, ograniczonych kohomologii).

Staranna redakcja niekiedy sprawia wrażenie nadmiernej pedantyczności. Na przykład dowód Lematu 3.1.4 (mówiącego, że dla przestrzeni geodezyjnej warunek Lipschitza wystarczy sprawdzać na dowolnie małych odległościach) jest oczywisty i mógłby być opuszczony.

Angielski nie jest moim językiem ojczystym, wiec nie chce oceniać angielszczyzny rozprawy. Praca jest zrozumiała i czyta się płynnie.

Nieznacznym niedociągnięciem pracy jest typografia wynikająca z braku umiejętności Kandydata w posługiwaniu się systemem składu tekstu TEX (wbrew temu co jest napisane w jego CV). Poniższa lista usterek typograficznych nie aspiruje do bycia wyczerpującą. W pracy konsekwentnie używany jest pojedynczy apostrof zamykający (') w miejscu gdzie powinien stać otwierający (‘). Dwukropek zamiast komendy `\colon` (np. $f : M \to N$ zamiast $f\colon M \to N$. Lokalnie skończone łańcuchy oznaczane są jako C^{lf} zamiast C^{lf} (niewłaściwe spacjowanie wynikające z nieumiejętnego użycia trybu matematycznego). Nawiasy nie są dostosowane do okalanego przez nie tekstu. Np. po $\dfrac{\pi}{\sqrt{K}}$ następuje $\}$. Niefrasobliwie użyto przecinka w ostatniej eksponowanej formule na str. 36 i kropki w drugiej takiej formule na str. 39. Okolicznością łagodzącą jest fakt, że żadne znane mi studium doktoranckie z matematyki nie zawiera elementów typografii w swoim curriculum.

Stwierdzam, że praca spełnia warunki stawiane rozprawom doktorskim. Oceniam, że uzasadnia ona nadanie Kandydatowi stopnia naukowego doktora nauk matematycznych. Wnoszę o jej przyjęcie i dopuszczenie mgr. Karola Strzałkowskiego do kolejnych etapów przewodu doktorskiego.