# Lipschitzowska objętość symplicjalna

Rozprawa doktorska

Streszczenie

Karol Strzałkowski

## Objętość symplicjalna

Celem niniejszej pracy jest pokazanie nowych własności Lipschitzowskiej objętości symplicjalnej. Objętość symplicjalna zamkniętej, orientowalnej rozmaitości $M$ wymiaru $n$ jest zdefiniowana jako

$$\|M\| := \inf\{|c|_1 \ : \ c \in C_*(M;\mathbb{R}) \text{ jest cyklem podstawowym}\},$$

gdzie $C_*(M,\mathbb{R})$ jest singularnym kompleksem łańcuchowym na $M$ o współczynnikach rzeczywistych, zaś $|\cdot|_1$ oznacza normę $\ell^1$ na łańcuchach singularnych ze względu na bazę złożoną z sympleksów singularnych. Jest to niezmiennik homotopijny, wykazujący jednak związki ze sztywniejszymi strukturami na rozmaitości (na przykład z objętością Riemannowską).

Objętość symplicjalna została wprowadzona i użyta po raz pierwszy przez Gromowa w jego dowodzie twierdzenia Mostowa o sztywności [7, 11]. Z tego względu jest również czasem nazywana *normą Gromowa*. Gromow udowodnił, iż dla dwóch zwartych rozmaitości hiperbolicznych $M_1$, $M_2$ tego samego wymiaru (rozumianych jako ilorazy przestrzeni hiperbolicznej przez grupę działającą na niej w sposób wolny i właściwy przez izometrie) ich objętości symplicjalne są dodatnie i proporcjonalne do objętości Riemannowskiej, czyli

$$\frac{\|M_1\|}{\mathrm{vol}(M_1)} = \frac{\|M_2\|}{\mathrm{vol}(M_2)}.$$

Następnie wykorzystał ten fakt w dowodzie twierdzenia Mostowa by pokazać, że dwie homotopijnie równoważne zwarte rozmaitości hiperboliczne muszą mieć tę samą objętość. Objętość symplicjalna została jednak zbadana przez Gromowa dużo dokładniej w jego pracy [3]. Uogólnił on w niej powyższą zasadę na dowolną parę rozmaitości Riemannowskich o izometrycznych nakryciach uniwersalnych, jak również wykazał inne związki objętości symplicjalnej i Riemannowskiej, między innymi udowodnił istnienie oszacowań z góry i z dołu na objętość symplicjalną za pomocą objętości Riemannowskiej, o ile spełnione są pewne warunki dotyczące krzywizny. Gromow w omawianej pracy opisał również szereg zastosowań objętości symplicjalnej.

Objętość symplicjalną stosuje się do badań minimalnej objętości Riemannowskiej [3], hiperbolicznych chirurgii Dehna [11], rozpoznawania rozmaitości grafowych [2] oraz obliczania liczby wielostycznych trajektorii trawersujących pól wektorowych [1]. Jednak jednym z podstawowych zastosowań objętości symplicjalnej są twierdzenia o stopniach odwzorowań. Jeżeli $f : M \to N$ jest ciągłym odwzorowaniem między rozmaitościami zamkniętymi i orientowalnymi tego samego wymiaru, wtedy oczywiście

$$\|N\| \cdot |\deg(f)| \leqslant \|M\|,$$

skąd wniosek, że jeżeli $\|N\| > 0$, to

$$|\deg(f)| \leqslant \frac{\|M\|}{\|N\|}.$$

Objętość symplicjalna może więc pomóc uzyskiwać stałe ograniczające możliwy stopień odwzorowań między rozmaitościami. O ile jednak nie potrafimy obliczać objętości symplicjalnej, powyższa metoda jest tyleż prosta, co bezużyteczna. Pomocne mogą być już wszelkie oszacowania objętości symplicjalnej, czy choćby przykłady rozmaitości, dla których objętość ta jest niezerowa. Szczęśliwie, jest kilka własności pozwalających dowodzić dodatniości objętości symplicjalnej, mianowicie:

1. *Dodatniość przy ujemnej krzywiźnie* [3, 5, 8]

   Jeżeli $M$ jest zamkniętą rozmaitością ujemnie zakrzywioną, wtedy ma dodatnią objętość symplicjalną. Co więcej, jeżeli $\sec(M) \leqslant -1$, wtedy istnieje dodatnia stała $C_n$ zależna jedynie od wymiaru $M$, taka, że

   $$\|M\| \geqslant C_n \cdot \mathrm{vol}(M).$$

   Można również pokazać, że jest to również prawdą dla zwartych przestrzeni lokalnie symetrycznych niezwartego typu przy ustalonej metryce odpowiedniej przestrzeni symetrycznej [5, 8].

2. *Zasada proporcjonalności* [3]

   Jeżeli $M$ i $N$ są zamkniętymi rozmaitościami Riemannowskimi o izometrycznych nakryciach uniwersalnych, wtedy

   $$\frac{\|M\|}{\mathrm{vol}(M)} = \frac{\|N\|}{\mathrm{vol}(N)}.$$

3. *Nierówność produktowa* [3]

   Dla dowolnych dwóch zamkniętych rozmaitości $M$ i $N$ zachodzą nierówności

   $$\|M\| \cdot \|N\| \leqslant \|M \times N\| \leqslant \binom{\dim M + \dim N}{\dim M} \|M\| \cdot \|N\|.$$

4. *Addytywność ze względu na sumy spójne* [3]

   Jeżeli $M$ i $N$ są tego samego wymiaru $\geqslant 3$, wtedy

$$\|M\#N\| = \|M\| + \|N\|.$$

Z drugiej strony jest jednak dużo rozmaitości o zerowej objętości symplicjalnej, jak choćby wszystkie rozmaitości o średniowalnej grupie podstawowej [3].

Naturalnym pytaniem jest, co dzieje się w przypadku rozmaitości niezwartych. Najprostszym uogólnieniem objętości symplicjalnej jest infimum norm $\ell^1$ lokalnie skończonych cykli podstawowych. Definicja ta redukuje się do klasycznej w przypadku zwartym, jednakże nie wnosi zbyt wiele dla rozmaitości niezwartych. Z wyżej wymienionych faktów jedynie addytywność ze względu na sumy spójne pozostaje prawdziwa w przypadku niezwartym, nie ma więc w istocie zbyt wielu narzędzi, które pozwalałyby podać przykład rozmaitości niezwartej o dodatniej objętości symplicjalnej. Co więcej, wiele takich 'potencjalnych przykładów' ma w istocie zerową objętość symplicjalną. Warto tu wspomnieć choćby fakt udowodniony przez Gromova [3], że produkt trzech otwartych rozmaitości ma zawsze zerową objętość symplicjalną.

Gromov zasugerował jednak rozwiązanie, które pozwoliłoby uniknąć powyższych niedogodności. Mianowicie, można rozważać objętość symplicjalną liczoną na lokalnie skończonych Lipschitzowskich cyklach podstawowych, tzn. takich, które składają się z sympleksów o jednostajnej stałej Lipschitza. W ten sposób uzyskujemy *Lipschitzowską objętość symplicjalną*:

$$\|M\|_{\mathrm{Lip}} := \inf\{|c|_1 \ : \ c \in C_*^{lf}(M;\mathbb{R}) \text{ is a fundamental cycle, } \mathrm{Lip}(c) < \infty\},$$

gdzie $\mathrm{Lip}(\sum_i a_i\sigma_i) = \sup_i \mathrm{Lip}(\sigma_i)$. Tak zdefiniowana objętość symplicjalna redukuje się do klasycznej dla gładkich rozmaitości zwartych, daje jednak ciekawe rezultaty również w przypadku niezwartym.

W pracy udowodnione są poniższe twierdzenia, które potwierdzają przypuszczenie, jakoby Lipschitzowska objętość symplicjalna była właściwym uogólnieniem objętości symplicjalnej.

**Twierdzenie A.** *Jeżeli $M$ jest rozmaitością ujemnie zakrzywioną, wtedy ma dodatnią Lipschitzowską objętość symplicjalną. Co więcej, jeżeli* $\sec(M) \leqslant -1$, *wtedy istnieje dodatnia stała $C_n$ zależna jedynie od wymiaru $M$ taka, że*

$$\|M\|_{\mathrm{Lip}} \geqslant C_n \cdot \mathrm{vol}(M).$$

**Twierdzenie B** (Nierówność produktowa)**.** *Dla dowolnych dwóch rozmaitości o ograniczonej z góry krzywiźnie sekcyjnej $M$ i $N$ zachodzą nierówności*

$$\|M\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \|N\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \|M \times N\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \binom{\dim M + \dim N}{\dim M} \|M\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \|N\|_{\mathrm{Lip}}.$$

**Twierdzenie C** (Zasada proporcjonalności)**.** *Jeżeli $M$ i $N$ są rozmaitościami o izometrycznych nakryciach uniwersalnych i ograniczonej z góry krzywiźnie sekcyjnej, wtedy*

$$\frac{\|M\|_{\mathrm{Lip}}}{\mathrm{vol}(M)} = \frac{\|N\|_{\mathrm{Lip}}}{\mathrm{vol}(N)}.$$

Dowód Twierdzenia A jest znany specjalistom, jednak nie jest szczegółowo opisany w literaturze, dlatego jest podany dla kompletności. Dowody Twierdzeń B oraz C są nowe i wykorzystują kawałkową procedurę prostowania, wprowadzoną przez autora w pracy [10]. Warto wspomnieć, że twierdzenia te (B i C) zostały ostatnio udogólnione przez Franceschiniego na przypadek rozmaitości bez ograniczeń na krzywiznę [4].

By pokazać, że Lipschitzowska objętość symplicjalna zachowuje się bardzo podobnie do klasycznej objętości symplicjalnej, dla zupełności udowodnione jest też poniższe twierdzenie. Jest ono znane, lecz nigdzie dotychczas nieopublikowane.

**Twierdzenie D.** *Jeżeli $M$ jest rozmaitością taką, że $\|M\|_{\mathrm{Lip}} < \infty$ oraz $\pi_1(M)$ jest średniowalna, wtedy $\|M\|_{\mathrm{Lip}} = 0$.*

W pracy korzystamy z poniższych technik wykorzystywanych do badania objętości symplicjalnej, mających również swoje wersje w przypadku Lipschitzwoskim. Zasada dualności została wprowadzona przez Gromowa [3] i zaadoptowana do przypadku Lipschitzowskiego przez Löh i Sauera [6]. Dyfuzja łańcuchów została również wprowadzona pierwotnie przez Gromowa [3], opisujemy ją jednak w inny od niego sposób, w szczególności bez użycia multikompleksów.

## Zasada dualności

Jeżeli $M$ jest $n$-wymiarową zamkniętą, orientowalną rozmaitością, wtedy jej objętość symplicjalną da się wyrazić za pomocą półnormy $\ell^\infty$ jej podstawowej klasy kohomologii. Dokładniej

$$\|M\| = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty},$$

gdzie $[M]^*$ jest podstawową klasą kohomologii w $H^n(M;\mathbb{R})$, $\|[M]^*\|_\infty = \inf\{\|\phi\|_\infty : \phi \in C^n(M;\mathbb{R}), [\phi] = [M]^*\}$ oraz $\|\phi\|_\infty = \sup_{\sigma\in C(\Delta^n,M)} |\phi(\sigma)|$ dla $\phi \in C^n(M;\mathbb{R})$. Równość ta jest w wielu przypadkach bardzo pomocna przy obliczaniu objętości symplicjalnej. Nie jest ona jednak prawdziwa dla Lipschitzowskiej objętości symplicjalnej, nawet gdy zastosujemy kohomologiczną klasę podstawową o zwartym nośniku. Istnieje jednak pewien (niestety bardziej skomplikowany) wariant zasady dualności, działający dla Lipschitzowskiej objętości symplicjalnej.

**Twierdzenie.** *Niech $M$ będzie zupełną rozmaitością orientowalną, spójną. Wtedy dla dowolnej lokalnie skończonej rodziny $A \subset C(\Delta^n, M)$ złożonej z sympleksów o jednostajnej stałej Lipschitza zachodzi równość*

$$\|M\|^A = \frac{1}{\|[M]^*_{\mathrm{Lip}}\|^A_\infty},$$

*gdzie $[M]^*_{\mathrm{Lip}}$ jest kohomologiczną klasą podstawową o Lipschitzowsko-zwartym nośniku, $\|\cdot\|^A$ jest półnormą indukowaną przez normę*

$$|c|_1^A := \begin{cases} |c|_1 & \textit{jeżeli } \operatorname{supp}(c) \subset A, \\ \infty & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

*na łańcuchach singularnych, zaś $\|\cdot\|^A_\infty$ jest półnormą indukowaną przez normę $\|\phi\|^A_\infty = \sup_{\sigma\in A} |\phi(\sigma)|$ na kołańcuchach singularnych.*

## Dyfucja łańcuchów

Niech $M$ będzie rozmaitością, zaś $K \subset M$ jej łukowo spójnym, zwartym podzbiorem. Wtedy jako $\Pi(M, K)$ oznaczamy grupę złożoną z odwzorowań (niekoniecznie ciągłych!) przyporządkowujących punktom z $K$ klasy homotopii ścieżek w $M$ względem ich końców, takich, że dla $g \in \Pi(M, K)$, $g = (\gamma_x)_{x\in K}$:

- $\gamma_x(0) = x$;
- $\gamma_x(1) \in K$;
- $g$ ma skończony nośnik, tzn. jedynie dla skończenie wielu $x \in K$ ścieżki $\gamma_x$ są nietrywialne;
- odwzorowanie $x \mapsto \gamma_x(1)$ wyznacza bijekcję na $K$.

Dyfuzja łańcuchów jest techniką polegającą na modyfikowaniu danego łańcucha singularnego za pomocą działania powyższej grupy. W szczególności, jeżeli powyższa grupa jest średniowalna, zaś łańcuch składa się z sympleksów o różnych wierzchołkach, jesteśmy w stanie 'uśrednić' łańcuch tak, by usunąć pewne sympleksy z obliczeń (Lipschitzwoskiej) objętości symplicjalnej. Prowadzi to do następującego stwierdzenia, które jest głównym technicznym rezultatem uzyskiwanym za pomocą dyfuzji łańcuchów.

**Stwierdzenie.** *Niech $M$ będzie rozmaitością, zaś $K \subset M$ łukowo spójnym zwartym podzbiorem takim, że obraz przekształcenia $\pi_1(K) \to \pi_1(M)$ jest średniowalny. Wówczas dla dowolnego (lokalnie skończonego, Lipschitzwoskiego) łańcucha singularnego $c = \sum_i a_i\sigma_i$ takiego, że każdy sympleks $\sigma_i$ ma różne wierzchołki, zachodzi następująca nierówność.*

$$\|[c]\|_1 \leqslant \sum_{\{i\,:\,\sigma_i \textit{ nie ma krawędzi w } K\}} |a_i|.$$

Nietrudnym wnioskiem z techniki dyfuzji jest Twierdzenie D. By je udowodnić, wystarczy najpierw podzielić barycentrycznie dowolny łańcuch i zmodyfikować go tak, by wszystkie sympleksy miały różne wierzchołki, a następnie zastosować dyfuzję łańcuchów na odpowiednio dużym zwartym podzbiorze badanej rozmaitości.

## Kawałkowa procedura prostowania

Kawałkowa procedura prostowania, która stanowi główną techniczną część pracy, jest nowa i opisana przez autora również w jego pracy [10]. Klasyczna procedura prostowania, możliwa do zastosowania jedynie dla rozmaitości niedodatnio zakrzywionych, działała następująco. Mając dany sympleks singularny $\sigma$ na niedodatnio zakrzywionej jednospójnej rozmaitości Riemannowskiej $M$, istnieje dokładnie jeden sympleks geodezyjny (zdefiniowany indukcyjnie jako geodezyjny stożek nad podstawą, będącą sympleksem geodezyjnym) o takich samych (i tak samo uporządkowanych) wierzchołkach. Przekształcenie przyporządkowujące sympleksowi ten właśnie sympleks geodezyjny, zwany *wyprostowaniem* $\sigma$ i oznaczanym przez $\mathrm{str}(\sigma)$, rozszerza się do przekształcenia łańcuchowego o normie $\ell^1$ mniejszej lub równej 1 i łańcuchowo homotopijnego z identycznością na $C_*(M;\mathbb{R})$. Podobną procedurę można zastosować na dowolnej niedodatnio zakrzywionej rozmaitości $M$ przez podniesienie danego sympleksu $\sigma$ do nakrycia uniwersalnego, wyprostowania go tam i opuszczenia rezultatu. Główną zaletą procedury jest możliwość zastąpienia dowolnego łańcucha singularnego łańcuchem dużo bardziej regularnym bez zwiększenia normy, co pozwala czasem znacząco uprościć obliczenia objętości symplicjalnej.

Kawałkowa procedura prostowania jest uogólnieniem klasycznej procedury prostowania na przypadek rozmaitości o krzywiźnie ograniczonej z góry i Lipschitzowskiej objętości symplicjalnej. Dla danego Lipschitzwoskiego sympleksu singularnego $\sigma$ i rozmaitości Riemannowskiej $M$ się ona z następujących etapów.

- $\sigma$ należy rozdrobnić barycentrycznie $m$ razy, gdzie minimalne $m$, dla którego procedura zadziała, zależy od stałej Lipschitza $\sigma$, wymiaru $M$ i górnego ograniczenia na krzywiznę $M$

- Każdy sympleks $\sigma'$ z $m$-krotnie rozdrobnionego sympleksu $\sigma$ podnosimy do pewnego *otoczenia eksponencjalnego*. Dla danego punktu $x \in M$ jego otoczenie eksponencjalne $V_x$ jest zdefiniowane jako kula o odpowiednim promieniu (ograniczonym z dołu przez stałą zależną od krzywizny $M$) w przestrzeni stycznej $T_xM$, z metryką Riemannowską indukowaną z przekształcenia $\exp_x : T_xM \to M$.

- Eksponencjalne otoczenie każdego punktu ma tę własność, że punkty w pewnym (jednostajnym) otoczeniu zera w $V_x$ dla $x \in M$ mają jednostajnie dodatni promień włożoności. Możemy więc klasycznie wyprostować podniesienie każdego sympleksu $\sigma'$, o ile jest on odpowiednio mały, a to gwarantuje nam wybór $m$.

- Opuszczamy wyprostowane w powyższy sposób sympleksy. Ponieważ otoczenia eksponencjalne dopuszczają między sobą lokalnie izometryczne odwzorowania przejścia, powyższa procedura zachowuje brzegi sympleksów i możemy je wszystkie skleić ponownie do jednego sympleksu $\mathrm{str}_m(\sigma)$.

W szczególności uzyskujemy następujące stwierdzenie.

**Stwierdzenie.** *Jeżeli $M$ jest zupełną rozmaitością Riemannowską o ograniczonej z góry krzywiźnie, dla każdego cyklu $c \in C_*^{lf,\mathrm{Lip}}(M;\mathbb{R})$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że cykl $\mathrm{str}_m(c)C_*^{lf,\mathrm{Lip}}(M;\mathbb{R})$ jest dobrze zdefiniowany, $m$-ty podział barycentryczny $\mathrm{str}_m(c)$ składa się z sympleksow geodezyjnych, $[c] = [\mathrm{str}_m(c)] \in H_*^{lf,\mathrm{Lip}}(M;\mathbb{R})$ oraz $|\,\mathrm{str}_m(c)|_1 \leqslant |c|_1$. W szczególności Lipschitzowską objętość symplicjalną można obliczać jedynie na kawałkami wyprostowanych łańcuchach.*

## Homologie kawałkami gładkie

Homologie kawałkami gładkie to homologie podkompleksu singularnego kompleksu łańcuchowego składającego się jedynie z łańcuchów złożonych z sympleksów kawałkami gładkich. Definicję tę można uogólnić na przypadek lokalnie skończony i Lipschitzowski. Wprowadzamy również kawałkami gładki wariant homologii Milnora-Thurstona, tzn. homologii, gdzie łańcuchy są odpowiednimi miarami Borelowskimi na zbiorze sympleksów singularnych. Są one wyposażone w pół-normę indukowaną przez normę absolutnej wariacji na miarach. Stosując kawałkową procedurę prostowania do tychże miar łatwo dowodzimy następującego stwierdzenia.

**Stwierdzenie.** *Niech $M$ będzie zupełną rozmaitością Riemannowsą o ograniczonej z góry krzywiźnie. Wówczas kawałkami gładkie, lokalnie skończone Lipschitzowskie $\ell^1$-homologie oraz kawałkami gładkie Lipschitzowskie homologie Milnora-Thurstona są izometrycznie izomorficzne.*

# Zastosowania procedury prostowania

Pod koniec pracy, korzystając z kawałkowej procedury prostowania, dowodzone są własności Lipschitzowskiej objętości symplicjalnej, mianowicie Twierdzenia A, B oraz C.

## Ograniczenie dolne przez objętość Riemannowską dla ujemnie zakrzywionych rozmaitości (Twierdzenie A)

Dowód faktu, iż dla zupełnej rozmaitości Riemannowskiej $M$ o krzywiźnie ograniczonej z góry przez $-1$ zachodzi nierówność

$$\|M\|_{\mathrm{Lip}} \geqslant C_n \cdot \mathrm{vol}(M)$$

dla pewnej stałej $C_n > 0$ zależnej jedynie od $n = \dim M$, wynika z tego, iż procedura prostowania (klasyczna) działa dla Lipschitzowskich lokalnie skończonych łańcuchów oraz z ograniczenia górnego na objętość geodezyjnych sympleksów w przestrzeni ujemnie zakrzywionej.

## Nierówność produktowa (Twierdzenie B)

Nierówność

$$\|M \times N\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \binom{\dim M + \dim N}{\dim M} \|M\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \|N\|_{\mathrm{Lip}}$$

dość łatwo wynika z własności symplicjalnej aproksymacji produktu krzyżowego oraz tego, że produkt krzyżowy (lokalnie skończonych) klas podstawowych jest klasą podstawową.

Dowód nierówności $\|M\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \|N\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \|M \times N\|_{\mathrm{Lip}}$ dla rozmaitości o ograniczonej z góry krzywiźnie jest nieco trudniejszy. Mówimy, że lokalnie skończona rodzina $(k+l)$-wymiarowych jednostajnie Lipschitzowskich sympleksów singularnych $A$ na $M \times N$ jest $(k,l)$-*rzadka*, jeżeli rodziny sympleksów $A_M$ i $A_N$ na $M$ i $N$ złożone z rzutowania pewnych $k$ i $l$ wymiarowych ścian sympleksów na $M$ i $N$ odpowiednio są lokalnie skończone. Ponieważ produkt krzyżowy jest dobrze określony dla kołańcuchów o Lipschitzowsko zwartych nośnikach, mamy nierówność

$$\|\phi \times \psi\|_\infty^A \leqslant \|\phi\|_\infty^{A_M} \cdot \|\psi\|_\infty^{A_N}$$

dla dowolnych dwóch kołańcuchów $\phi \in C^*_{cs,\mathrm{Lip}}(M,\mathbb{R})$, $\psi \in C^*_{cs,\mathrm{Lip}}(N,\mathbb{R})$. Korzystając z zasady dualności dla Lipschitzowskiej objętości symplicjalnej i powyższej nierówności otrzymujemy nierówność

$$\|M \times N\|^A \geqslant \|M\|^{A_M} \cdot \|N\|^{A_N}.$$

Jedyne, czego brakuje by udowodnić nierówność produktową to stwierdzenie, iż Lipschitzowską objętość symplicjalną da się obliczać na cyklach o rzadkich nośnikach. To zaś wynika z zastosowania kawałkowej procedury prostowania dla odpowiednio dobranego zbioru wierzchołków prostowanych sympleksów.

## Zasada proporcjonalności (Twierdzenie C)

Niech $M$ i $N$ będą dwiema rozmaitościami Riemannowskimi o izometrycznych nakryciach uniwersalnych. Głównym narzędziem w dowodzie zasady proporcjonalności jest istnienie wprowadzonego przez Thurstona [11] odwzorowania rozsmarowującego $\mathrm{smear}_*$ między kawałkami gładkim kompleksem singularnym na $M$ i kawałkami gładkim kompleksem Milnora-Thurstona na $N$. Odwzorowanie to jest łańcuchowe i nie zwiększa normy, ponadto

$$\langle \mathrm{dvol}_M, \mathrm{smear}_*([M]) \rangle := \int_{\mathscr{P}C^1(\Delta^n,M)} \int_{\Delta^n} \sigma^* \ \mathrm{dvol}_M \ d\,\mathrm{smear}_*([M])(\sigma) = \mathrm{vol}(M),$$

gdzie $[M]$ jest klasą podstawową $M$, zaś $\mathscr{P}C^1(\Delta^n, M)$ jest zbiorem sympleksów kawałkami gładkich.

Korzystając z kawałkowej procedury prostowania, dla danego cyklu podstawowego $c$ na $M$ jesteśmy w stanie skonstruować Lipschitzowski, lokalnie skończony cykl singularny $c'$ taki, że $[c'] = [\mathrm{smear}_*(c)]$ oraz $|c'| \leqslant \|\,\mathrm{smear}_*(c)\|$ (gdzie na cyklach Milnora-Thurstona rozważamy normę absolutnej wariacji miary). Stąd wniosek, iż

$$\frac{\mathrm{vol}(M)}{\mathrm{vol}(N)}\|N\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \|M\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Podobną nierówność w drugą stronę możemy łatwo uzyskać zamieniając obie rozmaitości miejscami w powyższym rozumowaniu.

## Literatura


[1] H. Alpert, G. Katz *Using simplicial volume to count multi-tangent trajectories of traversing vector fields*, Geom. Dedic. 180, no. 1 (2016) 323-338

[2] M. Boileau, B. Leeb, J. Porti *Geometrization of 3-dimensional orbifolds*, Ann. Math. 162 (2005) 195-290

[3] M. Gromov *Volume and bounded cohomology*, Inst.Hautes Études Sci. Publ. Math. no. 56 (1982), 5-99

[4] F. Franceschini *Proportionality Principle for the Lipschitz simplicial volume*, arXiv:1411.0147[math.GT] (2014), to appear in Geom. Dedic.

[5] J.-F. Lafont, B. Schmidt *Simplicial volume of closed locally symmetric spaces of non-compact type*, Acta Math. 197, no. 1 (2006) 129-143

[6] C. Löh, R. Sauer *Degree theorems and Lipschitz simplicial volume for non-positively curved manifolds of finite volume*, J. Topol. 2 (2009) 193-225

[7] H. J. Munkholm *Simplices of maximal volume in hyperbolic space, Gromov's norm, and Gromov's proof of Mostov's rigidity theorem (following Thurston)*, Topology Symposium Siegen 1979, Lecture Notes in Mathematics 778, Springer (1980) 109-124

[8] R. P. Jr Savage *The space of positive definite matrices and Gromov's invariant*, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982) 239-263

[9] L. Simon *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University 3 (1983)

[10] K. Strzałkowski *Piecewise straightening and Lipschitz simplicial volume*, arXiv:1409.3475 (2014), to appear in J. Topol. Anal.

[11] W. P. Thurston *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, `http://www.msri.org/publications/books/gtm3` (1978)