

Wrocław, 30 czerwca 2021r.

prof. dr hab. Dariusz Buraczewski
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Wrocławski

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Klaudiusza Czudka

Rozprawa doktorska mgr. Klaudiusza Czudka przygotowana została w języku angielskim i jest zatytułowana *Ergodic properties of certain iterated function systems arising in partially hyperbolic dynamics*. Dotyczy ona losowych systemów iteracyjnych określonych na przedziale $[0, 1]$. Pierwsze dwa rozdziały mają charakter wprowadzający. Rozdział 3 jest częścią niepublikowanej jeszcze samodzielnej pracy. Natomiast rozdziały 4 i 5 oparte są na pracach

- (P1) K. Czudek, T. Szarek, *Ergodicity and central limit theorem for random interval homeomorphisms*. Israel J. Math. 239 (2020), no. 1, 75–98.
- (P2) K. Czudek, H. Wojewódka-Ściażko, and T. Szarek, *The law of the iterated logarithm for random interval homeomorphisms*, To appear in Israel Journal of Mathematics, 2020.
- (P3) K. Czudek, *Alsedá-Misiurewicz systems with place-dependent probabilities*. Nonlinearity 33 (2020), no. 11, 6221–6243.

Szczegółowe omówienie wyników. Rozprawa poświęcona jest opisowi własności ergodycznych jednego z podstawowych procesów Markowa zdefiniowanego poprzez losowe iteracje odcinka $[0, 1]$, tj.

$$X_n = F_n(X_{n-1}),$$

gdzie F_n jest odwzorowaniem $[0, 1]$ wybranym losowo z zadanego skończonego zbioru rosnących homeomorfizmów $\{f_1, \dots, f_m\}$. Prawdopodobieństwo może zależeć od aktualnej wartości procesu (ten przypadek jest badany w rozdziale 5, w pozostałej części pracy jest ono stałe na odcinku). Autor opisuje odpowiedzi na fundamentalne pytania o dynamikę układu oraz twierdzenia graniczne dla funkcjonałów addytywnych. Badana problematyka wpisuje się w teorię iteracyjnych systemów funkcyjnych studiowaną od co najmniej kilkudziesięciu lat. W tym kontekście warto wymienić prace J. E. Hutchinsona o geometrii

fraktalnej. Okazuje się jednak, że klasyczne techniki w tym bardzo konkretnym modelu zawodzą i niezbędne jest wypracowanie nowych metod. Rozprawa nawiązuje do badań z ostatnich lat dotyczących systemów dynamicznych, ich własności ergodycznych i powiązanych twierdzeń granicznych, którymi zajmowali się m.in. A. Zdunik, B. Deroin, V. Klepstyn, A. Navas.

W rozdziale 2 przedstawione są wcześniejsze wyniki dotyczące badanego systemu. Wyjaśniają one rolę współczynników Lyapunova i prezentują podstawowe własności modelu. Przy dosyć słabych założeniach (m.in. różniczkowalności odwzorowań w punktach 0 i 1) definiuje się współczynniki Lyapunova

$$\Lambda_0 = \sum_{i=1}^m p_i \log f'_i(0), \quad \Lambda_1 = \sum_{i=1}^m p_i \log f'_i(1),$$

gdzie p_i oznacza prawdopodobieństwo wylosowania odwzorowania f_i . Pełnią one rolę miernika jak mocno punkty brzegowe odcinka przyciągają do siebie trajektorię procesu. Pokazuje się, że jeżeli przynajmniej jeden z tych współczynników jest ujemny, to proces zbiega p.w. do jednego z wierzchołków. Najciekawsza jest sytuacja, gdy zarówno punkt 0 jak i punkt 1 odpychają trajektorię, czyli oba współczynniki Λ_0 i Λ_1 są dodatnie. Wówczas proces zbiega według rozkładu do pewnej miary probabilistycznej, która jest jedyną miarą stacjonarną procesu.

W kolejnych rozdziałach 3 i 4 dowodzone są twierdzenia graniczne związane z omawianym procesem stacjonarnym $\{X_n\}$ dla funkcjonałów addytywnych procesu, tzn. dla sum postaci

$$\phi(X_1) + \dots + \phi(X_n),$$

gdzie ϕ jest pewną ustaloną funkcją na $[0, 1]$. W tak ogólnej sytuacji klasyczne metody bazujące na funkcjach charakterystycznych nie działają i używa się technik martyngałowych. Kluczowe jest oszacowanie drugiej normy operatora markowskiego P działającego na funkcjach. Formalnie, bada się operator dualny U do P , a celem jest otrzymanie odpowiednio dobrych szacowań na $\|U^n \phi\|_{L^2(\mu)}$.

Wyniki rozdziału 3 oparte są na nieopublikowanej pracy doktoranta, gdzie analizowana jest sytuacja odwzorowań klasy C^2 . Wówczas tempo zbieżności trajektorii wg średniej jest wykładniczo szybkie (Twierdzenie 3.2), co z kolei implikuje wykładnicze malenie norm

$$\|U^n \phi\|_{L^2(\mu)} \leq Cq^n$$

dla $q < 1$. Kilkunastostronicowy dowód oparty jest na twierdzeniu Baxendala oraz częściowo na pracy É. Le Page'a. Tak mocny wynik pozwala niemal

natychmiast wywnioskować twierdzenia graniczne. Używając martyngałowej metody Gordina otrzymuje się centralne twierdzenie graniczne, prawo iterowanego logarytmu oraz funkcyjne twierdzenie graniczne.

W ogólnej sytuacji, gdy zakłada się jedynie ciągłość odwzorowań, otrzymanie wykładniczych szacowań nie jest możliwe. W rozdziale 4, opartym na pracach (P1) oraz (P2), korzystając z technik Malicet, pokazuje się słabsze szacowania

$$\left\| \sum_{k=1}^n U^k \phi \right\|_{L^2(\mu)} \leq Cn^{3/8},$$

jednak w świetle wyników Maxwella-Woodroofe'a są one wystarczające do uzyskania zarówno centralnego twierdzenia granicznego jak i prawa iterowanego logarytmu.

Ostatni rozdział 5 oparty jest na samodzielnej pracy (P3). Badane są systemy homeomorfizmów odcinka jednostkowego w sytuacji, gdy prawdopodobieństwo wylosowania danego odwzorowania zależy od aktualnej pozycji procesu. Zazwyczaj własności ergodyczne są konsekwencją tzw. kontrakcji wg średniej, nie jest jednak ona spełniona w tym przypadku. Autor koncentruje swoje wysiłki na przykładzie systemu Alsedy-Misiurewicza, składającego się z dwóch kawałkami liniowych homeomorfizmów. Z uwagi jednak na złożoność problemu zrozumienie nawet tego przypadku jest cenne. W Twierdzeniu 5.1 pokazane jest (przy odpowiednich, dosyć naturalnych założeniach) istnienie jedynej miary probabilistycznej procesu, a następnie wynioskowane jest centralne twierdzenie graniczne (to ostatnie rozumowanie nie jest częścią rozprawy).

Podsumowanie. Rozprawa doktorska dotyczy trudnych i aktualnych zagadnień, będących w centrum zainteresowania wielu matematyków zajmujących się stochastycznymi układami dynamicznymi. Należy podkreślić, że Autor rozprawy porusza fundamentalne problemy dotyczące niezwykle ważnych i jednocześnie elementarnych przykładów. Wszystkie nowe wyniki dotyczą układów opartych na skończeniu wielu homeomorfizmach odcinka $[0, 1]$. Biorąc pod uwagę jak wielu matematyków badało już ten model, należy docenić rangę tak fundamentalnych wyników jak przedstawione w rozprawie twierdzenia graniczne. Zawarte w pracy rozumowania są często trudne i momentami wymagają żmudnych obliczeń, jednak w dużej mierze są to nowe, oryginalne i ciekawe pomysły. Większość otrzymanych wyników została już opublikowana w bardzo dobrych pismach Israel Journal of Mathematics oraz Nonlinearity.

Dużą wartością pracy jest opisanie znacznie szerszego kontekstu tematyki badań. Z jednej strony Autor uzupełnił rozprawę o wyniki również innych ma-

tematyków i przedstawił ich kompletne dowody. Dzięki temu rozprawa stała się samowystarczalna. Jest to niestety niezwykle rzadkie. Zazwyczaj głębsze zrozumienie rozprawy doktorskiej wymaga przeanalizowania również pokrewnej literatury. Dzięki takiemu podejściu można zapoznać się z podstawowymi technikami używanymi w tej tematyce, co niezwykle ułatwia zrozumienie jej trudniejszych fragmentów. Za wartościowe uważam równie liczne dodatkowe komentarze, stawiające dalsze problemy i wskazujące potencjalne dosyć ciekawe kierunki badań. Pokazują one dużą dojrzałość Doktoranta i postrzeganie matematyki nie tylko poprzez pryzmat własnych badań.

Pan Klaudiusz Czudek jest autorem trzech innych publikacji pochodzących jeszcze z okresu Jego studiów magisterskich i niezwiązanych z tematyką rozprawy doktorskiej. W trakcie studiów doktorskich realizował dwa prestiżowe projekty Diamentowy Grant oraz Preludium. Ma na swoim koncie liczne wystąpienia konferencyjne (niestety z powodu pandemii aktywność ta znacznie spadła)

Należy przyznać, że rozprawę czyta się bardzo dobrze i można skutecznie śledzić kolejne rozumowania. Niestety są jednak fragmenty, które nie zostały w pełni dopracowane przez Autora. Z jednej strony praca napisana jest niezwykle elementarnie, z dbałością o wyjaśnienie nadrobniejszych nawet szczegółów. Ale z drugiej już we wstępie w rozdziale 1.2 Autor nawiązując do gładkich systemów dynamicznych beztrąsko używa notacji, której wcześniej nie zdefiniował (W definicji na str. 8: zbiór Λ powinien być dokładniej określony, nienazwane M jest zapewne rozmaitością, stała C zamienia się na c . Podobnie poniżej w opisie przykładu Kana, nie została zdefiniowana przestrzeń na której określone są kolejne obiekty, a na której nagle definiowana jest miara Lebesguea.) Kolejne fragmenty rozprawy są jednak napisane zdecydowanie lepiej. W pracy zdarzają się literówki oraz drobne błędy (np. definicje t_1 oraz t_n na stronie 35 są błędnie napisane, ale łatwo można je poprawić). Niemniej jednak pracę czyta się z dużą przyjemnością, a liczne poglądowe rysunki wyjaśniają często istotę dowodu.

Konkluzja.

Rozprawa doktorska *Ergodic properties of certain iterated function systems arising in partially hyperbolic dynamics* mgr. Klaudiusza Czudka zdecydowanie przekracza ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie do dalszych etapów przewodu doktorskiego oraz o uznanie rozprawy za wyróżniającą.

J. Bonczewski