Zastosowanie metod wariacyjnych i metod punktu stałego w badaniu wybranych zagadnień brzegowych Dirichleta - strzeszczenie

Piotr Kowalski

13 października 2015

Niniejsza rozprawa zawiera twierdzenia o istnieniu rozwiązania lub istnieniu wielu rozwiązań dla pewnych nielinowych problemów różniczkowych, zarówno równań zwyczajnych jak i cząstkowych, z jednorodnymi warunkami brzegowymi Dirichleta. Niniejsza praca posiada dwa główne cele, i dla każdego z nich do rozwiązania proponowane jest inne podejście.

Pierwszy z celów jest wykazanie istnienia wielu rozwiązań dla różnych typów problem z nieliniową wartością własną dla p-laplasjanu. Podajemy uzyskane w tej dziedzinie wyniki w rozdziale 3 rozprawy. Podstawowym twierdzeniem użytym w rozprawie do tego celu jest następujące rozszerzenie słynnego twierdzenia o trzech punktach krytycznych Ricceriego.

Twierdzenie ([7] Twierdzenie o trzech punktach krytycznych Ricceriego). *Niech* X *będzie ośrodkową, refleksywną przestrzenią Banacha, oraz niech* $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ *będzie koercywnym i słabo ciągowo półciągłym z dołu funkcjonałem klasy* C^1 *należącym do* $\mathrm{W_X}$*, ograniczonym na podzbiorach ograniczonych* X*, takich że jego pochodna ma ciągłą odwrotność na* X^**;* $J_1\colon X \to \mathbb{R}$ *jest funkcjonałem klasy* C^1 *posiadający zwartą pochodną. Załóżmy, że* Φ *posiada ścisłe minimum lokalne w* u_0*, takie że* $\Phi(u_0) = J_1(u_0) = 0$*. Określmy następujące stałe*

$$\tau = \max\left\{0, \limsup_{\|u\|\to\infty} \frac{J_1(u)}{\Phi(u)}, \limsup_{u\to u_0} \frac{J_1(u)}{\Phi(u)}\right\},$$
$$\chi = \sup_{\Phi(u)>0} \frac{J_1(u)}{\Phi(u)},$$

i załóżmy, że $\tau < \chi$*.*

Wtedy dla każdego przedziału domkniętego $[a, b] \subset (\frac{1}{\chi}, \frac{1}{\tau})$ *(przyjmując następującą konwencje* $1/0 = \infty$ *i* $1/\infty = 0$*) istnieje* $\kappa > 0$ *posiadająca tę cechę, że dla każdego* $\lambda \in [a, b]$ *oraz każdego funkcjonału* $J_2\colon X \to \mathbb{R}$ *klasy* C^1 *o zwartej pochodnej, istnieje* $\delta > 0$ *taka, że dla dowolnego* $\gamma \in [0, \delta]$*, równanie*

$$\Phi'(u) - \lambda J_1'(u) - \gamma J_2'(u) = 0,$$

posiada co najmniej trzy rozwiązania w X *o normie mniejszej niż* κ*.*

Powyższe twierdzenie było wielokrotnie, z sukcesami, stosowane dla problemów posiadających w swojej strukturze wiele członów nieliniowych. Rozdział 3 składa się z trzech sekcji. Pierwsza z nich rozważa następujące zagadnienie brzegowe określone przez równanie cząstkowe.

Problem. *Znaleźć* $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{W}^{2,1}(\Omega)$ *takie jak*

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \mu\tfrac{u(x)}{|x|^2} + \lambda f(u(x)) + \gamma g(u(x)) \quad \text{p.w.} \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &\equiv 0, \end{aligned}$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *jest ograniczoną dziedziną zawierającą* 0 *i posiadającą lipschitzowski brzeg.*

Dla powyższego problemu poszukujemy jedynie rozwiązań w słabym sensie. Druga z sekcji rozważa inną wersję problemu nieliniowej wartości własnej.

Problem. *Znaleźć* $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathrm{W}^{2,1}(\Omega)$ *takie, że*

$$\begin{aligned} -\Delta_p u(x) + \mu\tfrac{|u(x)|^{p-2}u(x)}{|x|^p} &= \lambda f(u(x)) + \gamma g(u(x)) \quad \text{p.w.} \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &\equiv 0 \end{aligned}$$

gdzie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *jest ograniczoną dziedziną zawierającą* 0 *i posiadającą lipschitzowski brzeg oraz* $1 \le p \le n$ *i jednocześnie* $p(p+1) \ge n$*.*

Ponownie, nasze zainteresowania ograniczają się do słabych rozwiązań. Sekcje 3.1 oraz 3.2 zawierają dowody istnienia wielu rozwiązań dla obu tych problemów. Ostatnia z sekcji przytacza przykład nieliniowości spełniającej założenia twierdzenia.

Drugim celem niniejszej rozprawy jest dowód istnienia rozwiązania uzyskany metodą dwuetapową, stanowiącą połączenie metody wariacyjnej z twierdzeniem o punkcie stałym. Wyniki uzyskane tą metodą znajdują się w rozdziałach 4 i 5. W rozdziale 4 przedstawiony jest problem opisany równaniem różniczkowym zwyczajnym, natomiast w rozdziale 5 problemy dotyczą inkluzji różniczkowych. Pierwszym krokiem metody jest uzyskanie istnienia rozwiązania problemu pomocniczego, wyprowadzonego z podstawowego, z wykorzystaniem metod wariacyjnych. Drugi krok polega na wykazaniu istnienia punku stałego, co jest tożsame z rozwiązaniem problemu podstawowego. W rozdziale 4 do tego celu wykorzystane zostało klasyczne twierdzenie Banacha o punkcie stałym. Natomiast w rozdziale 5 podejście zostało uogólnione w taki sposób, że możliwe było wykorzystanie twierdzenia Kakutaniego–Fana–Glicksberga.

Twierdzenie ([1, Corollary 17.55] Kakutani–Fan–Glicksberg o punkcie stałym)**.** *Niech $S \subset \mathrm{X}$ będzie niepustym zwartym i wypukłym zbiorem, gdzie X jest lokalnie wypukłą przestrzenią topologiczną Hausdorffa oraz niech multifunkcja $\varphi\colon S \to 2^S$ ma niepuste i wypukłe wartości oraz domknięty wykres. Wtedy zbiór puntów stałych operatora φ (to znaczy $\{x \in S\colon x \in \varphi(x)\}$) jest niepusty i zwarty.*

Rozdział 4 zawiera dwa problemy z równaniami w typie Duffinga z jednorodnymi warunkami brzegowymi Dirichleta.

Problem. *Znaleźć $x \in \mathrm{H}_0^1(0,1) \cap \mathrm{W}^{2,1}(0,1)$ takie, że*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + r(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + g(t, x(t), u(t)) - f(t, x(t)) = 0 \quad \text{p. w.} \quad t \in (0,1), \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

Problem. *Znaleźć $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{W}^{2,1}(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwartym i ograniczonym zbiorem, takie że*

$$\Delta u(x) + r(x)\cdot\nabla u(x) + g(x, u(x), m(x)) = f(x, u(x)) \text{ p. w. } x \in \Omega$$
$$u|_{\partial\Omega} \equiv 0.$$

W przypadku drugiego z problemów jesteśmy zainteresowani istnieniem słabych rozwiązań, w odróżnieniu od problemu pierwszego gdzie otrzymane rozwiązania są klasycznymi. W rozdziale 4 przedstawiono dowody istnienia rozwiązań tych problemów. Wyniki uzyskane dla pierwszego problemu zostały opublikowane w [4, 6]. W rozdziale 5 następujące inkluzje różniczkowe są rozważane.

Problem. *Znaleźć $x \in \mathrm{H}_0^1(0,1) \cap \mathrm{W}^{2,1}(0,1)$ taki, że*

$$\begin{aligned} &-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) - r(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + N_1(t, x(t)) \ni f(t) \quad \text{p. w.} \quad t \in (0,1) \\ &x(0) = x(1) = 0. \end{aligned}$$

Problem. *Znaleźć $x \in \mathrm{H}_0^1(0,1) \cap \mathrm{W}^{2,1}(0,1)$ takie, że*

$$\begin{aligned} &-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) - r(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(t) \quad \text{p. w.} \quad t \in (0,1), \\ &x(0) = 0, \\ &-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(1) \in N_2(x(1)). \end{aligned}$$

Oba przypadki zawierają multifunkcje (N_1 oraz N_2 odpowiednio). Rozdział 5 zawiera dowody istnienia rozwiązań dla tych problemów uzyskane z połączenia metod analizy niegładkiej oraz przez twierdzenie Kakuraniego–Fana–Glicksberga o punkcie stałym. Rozdział 2 przytacza wszystkie wykorzystywane twierdzenia oraz definicje, oraz zawiera zunifikowany przegląd wykorzystywanych oznaczeń w całości rozprawy. Ostatnia z sekcji rozdziału 2 przedstawia autorską wersję twierdzenia o trzech punktach Canady–Iannizzotto, zaprezentowanego w [2]. Wynik ten został opublikowany w [3].

Bibliografia

[1] ALIPRANTIS, C., AND BORDER, K. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*. Springer, Berlin, 1999.

[2] CABADA, A., AND IANNIZZOTTO, A. A note on a question of Ricceri. *Appl. Math. Lett. 25*, 2 (2012), 215–219.

[3] GALEWSKI, M., AND KOWALSKI, P. M. Three solutions to discrete anisotropic problems with two parameters. *Cent. Eur. J. Math. 12*, 10 (2014), 1403–1415.

[4] KOWALSKI, P. M. Dirichlet boundary value problem for Duffing's equation. *Electron. J. Qual. Theo.*, 37 (2013), 1–10.

[5] KOWALSKI, P. M. The existence of a solution for Dirichlet boundary value problem for a Duffing type differential inclusion. *Discrite Cont. Dyn.-B 19*, 8 (2014), 2569–2580.

[6] KOWALSKI, P. M. Well posed Dirichlet problems pertaining to the Duffing equation. *Electron. J. Qual. Theo.*, 59 (2014), 1–15.

[7] RICCERI, B. A further three critical points theorem. *Nonlinear Anal.-THEOR 71*, 9 (2009), 4151–4157.