Streszczenie rozprawy doktorskiej

„E-kohomologiczny indeks Conleya"

Maciej Starostka

W rozprawie rozwijamy teorię E-kohomologicznego indeksu Conleya wprowadzonego przez A.Abbondandolo w [Abb99] i pokazujemy jak można ją zastosować by uzyskać krótki dowód hipotezy Arnolda na $2n$-wymiarowym torusie.

Rozdział pierwszy zawiera wstęp do rozprawy. Drugi rozdział rozpoczynamy od przypomnienia definicji E-kohomologii dla domkniętego i ograniczonego podzbioru ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathbb{H} = E^+ \oplus E^-$. W szczególności zwracamy uwagę na to, że dla $E^- = \{0\}$ otrzymujemy standardowe kohomologie Alexandera-Spaniera ze zwartymi nośnikami, zaś w przypadku gdy $E^+ = \{0\}$ otrzymujemy zaproponowaną przez K. Gębę i A.Granasa (patrz [GG73]) skończenie kowymiarową teorię kohomologii $H^{\infty-*}$. Dla sfery S^{-p} kowymiaru p w $\mathbb{H}$ grupy kohomologii H^{*-q} są niezerowe wtedy i tylko wtedy gdy $q = p$. W przypadku gdy obydwie przestrzenie tzn. E^+ i E^- są nieskończenie wymiarowe mamy do czynienia, podobnie jak w przypadku teorii Floera, z tzw. teorią *środkowo wymiarową*. Oznacza to, że grupy E-kohomologii H^*_E wykrywają nietrywialność sfer, które mają zarówno nieskończony wymiar jak i nieskończony kowymiar. Teoria E-kohomologii jest uogólnioną teorią kohomologii w następującym sensie: spełnia ona aksjomaty Eilenberga-Steenroda z ograniczoną klasą morfizmów i ze zmodyfikowanym aksjomatem wymiaru. A. Abbondandolo definiuje E-morfizmy jako odwzorowania $\Psi : X \to Y$ takie, że

(1) Ψ jest postaci $\Psi(x) = M(x) + K(x)$ gdzie M jest automorfizmem $\mathbb{H}$ spełniającym $M(E^+) = E^+$ i K jest odwzorowaniem pełnociągłym;

(2) $\Psi^{-1}(U)$ jest zbiorem ograniczonym dla każdego zbioru ograniczonego U.

W rozprawie zauważamy, że można poszerzyć klasę morfizmów na odwzorowania spełniające (1′) zamiast (1).

(1′) Ψ jest postaci $\Psi(x) = M(x)x + K(x)$ gdzie $M : X \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ jest ciągłe, ma zwarty obraz i $M(x)(E^+) = E^+$ dla każdego $x \in X$. Ponadto K jest odwzorowaniem pełnociągłym.

W szczególności dopuszczalnymi odwzorowaniami są przesunięcia wzdłuż odpowiedniego potoku, gdzie czas przesunięcia zależy w sposób ciągły od punktu początkowego. Obserwacja ta okazuje się być kluczowa przy dowodach własności indeksu Conleya.

W ostatnim paragrafie pierwszego rozdziału pokazujemy, że E-kohomologie mają dodatkową strukturę multiplikatywną.

Drugi rozdział poświęcony jest definicji oraz dowodom własności E-kohomologicznego indeksu Conleya, tj. tytułowego niezmiennika rozprawy. Dla potoków gradientowych niezmiennik ten został zdefiniowany przez A. Abbondandolo. W tym rozdziale rozszerzamy definicję tak, aby obejmowała również potoki niegradientowe. Takie rozszerzenie pociąga za sobą konieczność zmiany metod w dowodach własności indeksu. Rozdział rozpoczyna się od wyabstrahowania warunku zwartości, który kompensuje brak lokalnej zwartości przestrzeni. Dla potoku $\eta : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ warunek zwartości (C) jest następujący:

(C) Jeżeli dla ciągu $\{x_n\} \subset \mathbb{H}$ zbiór

$$\delta(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \eta(x_n, [-n, n])$$

jest ograniczony, to z $\{x_n\}$ można wybrać podciąg zbieżny.

Silniejszy warunek (C^+), w którym zamiast zbioru $\delta(x)$ występuje zbiór

$$\delta^+(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \eta(x_n, [0, n])$$

był wcześniej rozpatrywany w pracy K.P.Rybakoweskiego i E.Zehndera [RZ85]. Niemniej jednak warunek (C^+) nie jest spełniony dla $\mathcal{LS}$-potoków (patrz [GIP99]) generowanych przez gradienty funkcjonałów silnie nieokreślonych tzn. funkcjonałów, których punkty krytyczne mają nieskończony indeks i koindeks Morse'a. W ramach dyskusji warunku zwartości (C) pokazujemy, że pociąga on za sobą lokalny warunek Palais-Smale'a, tzn. dla funkcjonału $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$

(PS-loc) Jeżeli ciągi $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ są ograniczone i $\nabla f(x_n) \to 0$, to z ciągu $\{x_n\}$ można wybrać podciąg zbieżny.

W następnym paragrafie definiujemy E-kohomologiczny indeks Conleya dla $\mathcal{LS}$-potoków. Jeżeli S jest izolowanym zbiorem niezmienniczym dla $\mathcal{LS}$ potoku η, to

$$\mathrm{ch_E}(S, \eta) := H^*_E(N, L),$$

gdzie (N, L) jest parą indeksową dla S. Pokazujemy, że definicja jest poprawna - $\mathrm{ch_E}(S, \eta)$ nie zależy od wyboru pary indeksowej. Dowodzimy nietrywialności indeksu, tzn.

$$\mathrm{ch_E}(S, \eta) \neq 0 \Rightarrow S \neq \emptyset.$$

Dowodowi własności kontynuacji, tj. homotopijnej niezmienniczości indeksu Conleya, poświęcony jest osobny paragraf. Dowód, chociaż wciąż techniczny, jest znacznie krótszy niż znane autorowi inne dowody twierdzeń o kontynuacji. Również w osobnym paragrafie, wykorzystujemy wspomnianą powyżej strukturę multiplikatywną do zdefiniowania długości kohomologicznej indeksu $\mathrm{CL}_E(S)$. Podobnie jak klasyczna długość kohomologiczna, CL_E szacuje z dołu liczbę wartości krytyczne funkcjonału. Dowody powyższych własności różnią sie od dowodów dla klasycznego indeksu Conleya z dwóch powodów. Po pierwsze przestrzeń $\mathbb{H}$ nie jest lokalnie zwarta. Po drugie nie możemy jak w większości klasycznych dowodów przejść do przestrzeni ilorazowej. Dzieje się tak dlatego, gdyż przestrzeń ilorazowa nie jest w naturalny sposób podzbiorem $\mathbb{H}$, nie ma więc dobrze zdefiniowanych E-kohomologii.

W rozdziale czwartym pokazujemy jak wykorzystać twierdzenie o kontynuacji, aby otrzymać potok, dla którego indeks $\mathrm{ch_E}$ jest łatwiejszy do policzenia. Niech V będzie podprzestrzenią $\mathbb{H}$. Mówimy, że $\mathcal{LS}$-potok η jest $\mathcal{LS}_V$-potokiem, jeżeli $\eta = (\eta_V, \eta_\perp)$ jest potokiem iloczynowym na $V \times V^\perp$ i $\eta_\perp$ jest potokiem liniowym. Jeżeli η jest LSV-potokiem dla pewnej skończenie wymiarowej podprzestrzeni V to mówimy, że η jest $\mathcal{LS}_{\mathrm{fin}}$-potokiem. Dowodzimy twierdzenie typu Reinecka (por. [Rei90]):

Dowolny $\mathcal{LS}$-potok można kontynuować do gradientowego $\mathcal{LS}_{\mathrm{fin}}$-potoku.

Jako wniosek otrzymujemy fakt, że E-kohomologiczny indeks Conleya może być policzony za pomocą:

- skończenie wymiarowych aproksymacji, jak w [GIP99] i [Izy01];
- lokalnych kohomologii Morse'a.

W szczególności izomorfizm z lokalnymi kohomologiami Morse'a jest wykorzystywany w dowodzie hipotezy Arnolda.

W ostatnim rozdziale pokazujemy jak przy pomocy rozwiniętej w poprzednich rozdziałach teorii otrzymać krótki dowód hipotezy Arnolda na $2n$-wymiarowym torusie. Korzystając z podejścia analitycznego opisanego w [HZ12], zamieniamy problem szukania periodycznych rozwiązań równań Hamiltona na problem szukania punktów krytycznych funkcjonału Rabinowitza f_H. Pokazujemy, że ∇f_H spełnia warunek

(BD) $\nabla f_H(U)$ jest ograniczony dla każdego ograniczonego zbioru U,

a następnie dowodzimy twierdzenie: jeżeli funkcjonał f spełnia warunek (BD) to istnieje maksymalny ograniczony zbiór niezmienniczy. Innymi słowy, istnieje takie R, że dla każdego $R' > R$

$$\mathrm{inv}((B(R), \eta) = \mathrm{inv}(B(R'), \eta),$$

gdzie $B(r)$ oznacza kulę w $\mathbb{H}$ o promienu r. Co więcej, możemy wybrać wspólne R dla ciągłej, sparametryzowanej odcinkiem rodziny funkcji.
Dla ustalonego Hamiltonianu H rozważmy rodzinę Hamiltonianów

$$\{(1-t)H : t \in [0,1]\}.$$

Rodzina ta definiuje rodzinę funkcjonałów $\{f_t\}$, a ta z kolei generuje rodzinę potoków gradientowych. Dobierając dostatecznie duże R otrzymujemy, że potoki generowane przez gradienty f_0 i f_1 kontynuują się do siebie. Wystarczy więc policzyć E-kohomologiczny indeks Conleya dla potoku η_1 generowanego przez ∇f_1, co jest już proste gdyż f_1 pochodzi od trywialnego Hamiltonianu i potok η_1 jest liniowy. Bezpośrednie rachunki pozwalają stwierdzić, że E-kohomologiczny indeks Conleya jest w tym wypadku izomorficzny z kohomologiami wyjściowego torusa T^{2n}. Na T^{2n} hipoteza Arnolda:

- w wersji niezdegenerowanej wynika z faktu mówiącego, że E-kohomologiczny indeks Conleya jest izomorficzny z lokalnymi kohomologiami Morse'a;
- w wersji zdegenerowanej wynika z faktu mówiącego, że długość kohomologiczna szacuje z dołu liczbę wartości krytyczne.

Literatura

[Abb99] A. Abbondandolo. Morse theory for strongly indefinite functionals and Hamiltonian systems. *Ph.D thesis*, pages 1–146, 1999.

[GG73] K. Gęba and A. Granas. Infinite dimensional cohomology theories. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 52(2):145–270, 1973.

[GIP99] K. Gęba, M. Izydorek, and A. Pruszko. The Conley index in Hilbert spaces and its applications. *Studia Mathematica*, 134(3):217–233, 1999.

[HZ12] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhäuser, 2012.

[Izy01] M. Izydorek. A cohomological Conley index in Hilbert spaces and applications to strongly indefinite problems. *Journal of Differential Equations*, 170(1):22–50, 2001.

[Rei90] J. Reineck. *Continuation to gradient flows*. Institute for Mathematics and its Applications (USA), 1990.

[RZ85] K. P. Rybakowski and E. Zehnder. A morse equation in Conley's index theory for semiflows on metric spaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 5:123–143, 1985.