dr hab. Piotr Mikołaj Sołtan, prof. UW
Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Wydział Fizyki
ul. Pasteura 5, 02-093 Warszawa
e-mail: piotr.soltan@fuw.edu.pl

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGR. MARIUSZA TOBOLSKIEGO PT. "THE LOCAL TRIVIALITY OF NONCOMMUTATIVE PRINCIPAL BUNDLES"

Recenzja przygotowana na zlecenie dyrektora Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk w Warszawie prof. dr. hab. Łukasza Stettnera z dnia 23. stycznia 2020.

1. Merytoryczna ocena rozprawy

Rozprawa poświęcona jest rozwinięciu analogonu pojęcia lokalnie trywialnej wiązki głównej w kontekście nieprzemiennej topologii i geometrii oraz omówieniu oraz udowodnieniu niektórych hipotez uogólniających w tym kontekście klasyczne twierdzenie Borsuka-Ulama. Materiał ten przedstawiony jest w trzech częściach:

- pierwszej poświęconej wyłożeniu podstaw teorii wiązek głównych ze zwartą grupą strukturalną w języku umożliwiającym przejście do kontekstu nieprzemiennego i sformułowaniu topologicznych uogólnień twierdzenia Borsuka-Ulama,
- drugiej omawiającej uogólnienie pojęcia wiązki głównej do wolnych działań zwartych grup na niekoniecznie przemiennych C*-algebrach z jedynką i związane z nim uogólnienia wyniku typu Borsuka-Ulama,
- trzeciej, w której badane są działania zwartych grup kwantowych na (nieprzemiennych) C*-algebrach z jedynką i udowodnione są pewne nieprzemienne hipotezy typu Borsuka-Ulama.

Zanim omówimy kolejne części należy stwierdzić, że ów układ pracy pozwala autorowi doskonale przedstawić problematykę z uwzględnieniem

Data: 5. kwietnia 2020.

szerokiej motywacji, odniesień do innych działów matematyki (głównie topologii i teorii wiązek) oraz omówienia bieżących problemów i hipotez uogólniających klasyczny wynik Borsuka i Ulama (tzw. *Borsuk-Ulam type conjectures*).

Uwagi ogólne.

Praca jest napisana w języku angielskim i pod względem językowym jest bez zrzutu. Wspomniana struktura rozprawy jest przejrzysta, a materiał sformułowany jest wyjątkowo jasno. Zawarte w pracy wyniki są nowe i ciekawe. Tematyka, którą zajął się mgr Tobolski jest jak najbardziej współczesna i jego praca zdecydowanie należy do głównego nurtu badań nieprzemiennej topologii i geometrii.

Rozprawa zawiera znikomą (choć niezerową) liczbę pomyłek natury typograficznej, co jednak w żadnym stopniu nie wpływa na jej jakość.

Uwagę zwraca dbałość autora o zilustrowanie części wyników i definicji nietrywialnymi przykładami. W szczególności należy tu wspomnieć eleganckie przykłady ilustrujące różnice pomiędzy różnymi wymiarami lokalnej trywialności w przypadku nieprzemiennym (np. przykłady 2.2.21 i 2.2.22). Umieszczenie tego rodzaju przykładów znakomicie ułatwia zrozumienie całości rozprawy.

Przejdziemy teraz do nieco bardziej szczegółowego omówienia kolejnych części pracy.

Część pierwsza.

Autor rozpoczyna od przedstawienia podstawowych pojęć dotyczących działań zwartych grup na zwartych przestrzeniach w języku algebr funkcji na tych przestrzeniach i grupach i tym samym kładzie podwaliny pod uogólnienie tych pojęć na przestrzenie i grupy kwantowe (opisywane przez algebry nieprzemienne). Następnie następuje dyskusja pojęcia działania wolnego i wyczerpujące omówienie tzw. wiązek głównych w sensie Cartana i w sensie Steenroda. W szczególności wprowadzone zostaje pojęcie lokalnie trywialnej G-przestrzeni (Definitoin 1.3.4). Następnie omówiony jest tzw. *genus Schwarza* G-przestrzeni, co stanowi wprowadzenie do części 1.3.2, w której autor rozwija teorię wymiaru lokalnej trywialności (*local triviality dimension*) leżącą u podstaw wszystkich dalszych wyników. Następnie autor wprowadza tzw. wiązki n-uniwersalne i podaje kilka równoważnych sformułowań twierdzenia Borsuka-Ulama oraz jednego z jego uogólnień (Conjecture 1.4.5). Uogólnienie to jest udowodnione w części 1.5.2, co stanowi ukoronowanie części rozprawy poświęconej teorii klasycznej.

Część druga.

Jak już wspomnieliśmy, część ta poświęcona jest badaniu działań zwartych grup na zawartych *kwantowych przestrzeniach* opisanych rzez niekoniecznie przemienne C*-algebry z jedynką. Przyjęta przez autora terminologia wedle której taka sytuacja nazywana jest *semiklasyczną* (w polskim wstępie do rozprawy – *półklasyczną*) jest co prawda sprzeczna ze standardowym użyciem tego terminu, ale w żadnym stopniu nie wpływa to na zrozumiałość tekstu.

Po uzupełnieniu nomenklatury (np. omówieniu podalgebr punktów stałych itp.) oraz podaniu nietrywialnego przykładu działania grupy SU(2) na sferze Natsumy-Olsen podane jest uogólnienie wymiaru lokalnej trywialności dla działań zwartych grup na C*-algebrach z jedynką. Uogólnienie to okazuje się być dość nietrywialne, zwłaszcza że trzy naturalne definicje ($\dim_{\mathrm{LT}}$, $\dim_{\mathrm{WLT}}$ i $\dim_{\mathrm{SLT}}$) okazują się nierównoważne, co autor pokazuje na bardzo zgrabnie skonstruowanych przykładach opisanych w części 2.2.5.

Ciekawym i wartościowym fragmentem części drugiej rozprawy są części 2.3.1 oraz 2.3.2, w których wskazane są związki omawianej teorii wymiaru lokalnej trywialności z wymiarem Rochlina (będącym ważnym narzędziem w teorii C*-algebr) i podana jest nowa charakteryzacja tego wymiaru dla działań na zwartych przestrzeniach.

W podrozdziałach 2.4.1 i 2.4.2 przedyskutowana są n-uniwersalne wiązki w kontekście działań na nieprzemiennych C*-algebrach. W szczególności wprowadzone są nieprzemienne operacje „złącza" (według terminologii zaproponowanej we wstępie przez autora, ang. *noncommutative join* i *free*^{2} *noncommutative join*) niezbędne do sformułowania uogólnień twierdzenia Borsuka-Ulama. Uogólnienia te udowodnione są w podrozdziale 2.5.

Część trzecia.

W ostatniej części rozprawy autor bada sytuację, w której zarówno przestrzeń jak i grupa, która na niej działa są zastąpione odpowiednimi obiektami nieprzemiennej topologii. Po krótkim wprowadzeniu uogólniającym terminologię na potrzeby tej sytuacji omówione są wymiar lokalnej trywialności i słaby wymiar lokalnej trywialności ($\dim_{\mathrm{LT}}$ i $\dim_{\mathrm{WLT}}$) dla działania zwartej grupy kwantowej na zwartej przestrzeni kwantowej. Definicja mocnego wymiaru lokalnej trywialności ($\dim_{\mathrm{SLT}}$) w tym przypadku jest nieco inna i autor odkłada ją do części 3.4.2 – po dyskusji n-uniwersalności w omawianym kontekście (dyskusja ta ma miejsce w podrozdziale 3.4). W tym miejscu napotykamy jedyny element rozprawy, który w mojej opinii zyskałby wiele, gdyby autor poświęcił nieco miejsca na uzupełnienie szczegółów rozumowania. Chodzi mianowicie o twierdzenie 3.3.2, które wydaje się być całkiem nietrywialne, a jest ono przytoczone z dość enigmatycznym uzasadnieniem "the following result can be deduced from either [83] or [75]", przy czym pozycje literatury [83] i [75] zawierają twierdzenia, których sformułowania odbiegają nieco od treści twierdzenia 3.3.2. Potrafię zweryfikować ten wynik w prostych przypadkach, ale chętnie zobaczyłbym pełne rozumowanie.

Zwieńczenie pracy następuje w rozdziale 3.5, w którym autor formułuje kilka hipotez dalece uogólniających wyjściowy wynik Borsuka-Ulama oraz twierdzenia i hipotezy typu Borsuka-Ulama omówione w poprzednich częściach rozprawy. Hipotezy te są ze sobą porównane, a następnie autor dowodzi prawdziwości hipotezy 3.5.2 dla działań zwartych grup kwantowych $\mathbb{G}$ z klasyczną podgrupą H taką, że $\dim_{\mathrm{SLT}} \mathrm{C}(\mathbb{G}) < +\infty$ (w sensie naturalnego działania H na $\mathbb{G}$).

2. Konkluzja

Recenzowana rozprawa jest bez wątpienia dziełem najwyższej próby. Jak już wspomnieliśmy jej formalna konstrukcja jest bardzo dobra. Praca jasno przedstawia wszystkie zagadnienia, zawiera nowe i ciekawe wyniki oraz otwiera pole do prowadzenia dalszych badań. Uwagę zwracają nietuzinkowa erudycja matematyczna autora i sprawne posługiwanie się przez niego narzędziami z dziedzin takich jak topologia, topologia algebraiczna, teoria C*-algebr, aż po podstawy nieprzemiennej geometrii, teorii zwartych grup kwantowych i K-teorię. Dzieło oparte jest na wynikach trzech prac oczekujących na publikację, ale zawiera też materiał spoza tych prac. Oprócz owych trzech publikacji mgr Tobolski jest współautorem wielu innych publikacji – baza danych Google Scholar odnotowuje ich 14, z czego przynajmniej cztery są już opublikowane. Bez wątpienia świadczy to o prężnym rozwoju kariery doktoranta.

Rozprawa doktorska mgr. Tobolskiego nie tylko w sposób oczywisty spełnia warunki ustawowe (ustawa z dnia 20. lipca 2020 r. „Prawo o szkolnictwie wyższym", art. 187), ale jest dziełem wyjątkowo wysokiej próby i zasługuje na wyróżnienie, o co niniejszym wnioskuję.

Piotr Sołtan

(Piotr Sołtan)