0.1 Streszczenie

Tytuł: Lokalna trywialność nieprzemiennych wiązek głównych.

Badanie symetrii przestrzeni topologicznych doprowadziło do powstania pojęcia *wiązki głównej*, które znalazło szerokie zastosowanie w topologii algebraicznej i teorii pola z cechowaniem w fizyce. Nieprzemienna topologia, która powstała z twierdzenia Gelfanda–Naimarka [28] oraz prób matematycznego opisu kwantyzacji, stanowi uogólnienie topologii lokalnie zwartych przestrzeni Hausdorffa oraz łączy w sobie zarówno narzędzia topologii, jak i analizy funkcjonalnej. Geometria nieprzemienna, podobnie jak nieprzemienna topologia i geometria algebraiczna, jest *geometrią bez punktów*, tj. obiektem jej badań nie są przestrzenie a algebry funkcji na nich określonych. Ta część matematyki od zawsze czerpała inspiracje z fizyki, dlatego też znalezienie odpowiednika wiązki głównej stało się ważnym zadaniem nieprzemiennej geometrii.

Praca doktorska jest oparta o trzy przeddruki:

1. A. Chirvasitu, L. Dąbrowski, M. Tobolski. The weak Hilbert–Smith conjecture from a Borsuk–Ulam-type conjecture. arXiv:1612.09567.

2. E. Gardella, P. M. Hajac, M. Tobolski, Jianchao Wu. The local-triviality dimension of actions of compact quantum groups. arXiv:1801.00767.

3. A. Chirvasitu, B. Passer, M. Tobolski. Equivariant Dimensions of Graph C*-algebras. arXiv:1907.10010.

Zgodnie z fizyczną nomenklaturą, praca została podzielona na część klasyczną: działania grup na przestrzeniach, część półklasyczną: działania grup na C*-algebrach oraz część kwantową: działania grup kwantowych na C*-algebrach.

Pierwsza część pracy koncentruje się na objaśnieniu rezultatów w klasycznej topologii algebraicznej przytoczonych na potrzeby kolejnych rozdziałach. Pojęcie lokalnie trywialnej zwartej wiązki głównej zostaje przeformułowane przy użyciu niezmienników takich jak *genus Schwarza* [76] oraz *indeks G-przestrzeni* [46]. Następnie przedstawiony jest dowód następującego twierdzenia: nie istnieje G-ekwiwariantne ciągłe odwzorowanie $E_{n+1}G \to E_nG$, gdzie E_nG oznacza *złącze* (ang. join) $(n+1)$-kopii nietrywialnej zwartej grupy Hausdorffa G. Dowód ten opiera się na strategii przyjętej przez Bestvinę oraz Edwardsa w nieopublikowanym dowodzie powyższego twierdzenia dla nietrywialnych zerowymiarowych zwartych grup Hausdorffa. Dla lokalnie trywialnych zwartych wiązek głównych, wynik ten jest równoważny (przemiennej) *hipotezie typu Borsuka–Ulama* postawionej przez Bauma, Dąbrowskiego oraz Hajaca [7]. Ogólna hipoteza Bauma–Dąbrowskiego–Hajaca implikuje słabszą wersję *hipotezy Hilberta–Smitha* [77] poprzez *hipotezę Ageeva* [1], co zostało udowodnione w pierwszym z trzech wspomnianych wyżej przeddruków.

W drugiej części pracy przedstawiona jest definicja *wymiaru lokalnej trywialności* działania zwartej grupy Hausdorffa na C*-algebrze z jedynką w trzech wariantach. Definicja ta jest zainspirowana pracą nad *nieprzemiennymi hipotezami typu Borsuka–Ulama* [7]

oraz *wymiarem Rokhlina* [35] powstałym na potrzeby klasyfikacji prostych ośrodkowych nuklearnych C*-algebr z jedynką. Uogólnia ona klasyczne pojęcie lokalnie trywialnej wiązki głównej, co można udowodnić w oparciu o wyniki z pierwszej części pracy. W tym rozdziale pokazano również, że wprowadzona definicja różni się od wymiaru Rokhlina, jeśli wyjdziemy poza kontekst działań zwartych grup Liego na zwartych przestrzeniach metrycznych. Następnie wskazano na n-uniwersalne C*-algebry dla działań o skończonym wymiarze lokalnej trywialności. Dla silnej wersji wymiaru są to C*-algebry funkcji ciągłych na złączu $(n+1)$-kopii rozważanej zwartej grupy Hausdorffa, a dla wersji podstawowej jest to C*-algebra stworzona przez konstrukcję analogiczną do złącza używającą pojęcia *produktu wolnego* C*-algebr z jedynką. Jako główne zastosowanie przedstawiony jest dowód hipotezy typu Borsuka–Ulama dla działań nietrywialnych zwartych grup Hausdorffa na C*-algebrach z jedynką o skończonym wymiarze lokalnej trywialności.

W części trzeciej pojęcie wymiaru lokalnej trywialności zostaje uogólnione do działań zwartych grup kwantowych [88] na C*-algebrach z jedynką. Lokalna trywialność w tym sensie implikuje *wolność działania* [6, 25] zwartej grupy kwantowej na C*-algebrze. Podana jest też definicja *n-uniwersalnej* lokalnie trywialnej nieprzemiennej wiązki głównej, która jest pierwszym krokiem ku zdefiniowaniu przestrzeni klasyfikującej zwartej grupy kwantowej. Na koniec trzeciej części pracy przedstawiony jest dowód hipotezy Bauma–Dąbrowskiego–Hajaca w przypadku gdy zwarta grupa kwantowa posiada klasyczną podgrupę, której działanie ma skończony wymiar lokalnej trywialności. Rezultat ten wraz z twierdzeniem Dąbrowskiego–Hajaca–Neshveyeva [23] jest najogólniejszym do tej pory wynikiem częściowo potwierdzającym nieprzemienną hipotezę Bauma–Dąbrowskiego–Hajaca.

0.2 Introduction

For a compact space X, let $C(X)$ denote the algebra of continuous complex-valued functions on X with pointwise operations. Then $C(X)$ can be given a *commutative* C*-algebra structure with the sup norm and pointwise complex conjugation as involution. In fact, due to the celebrated Gelfand–Naimark theorem [28], there is a contravariant equivalence of categories

$$\left\{\begin{matrix}\text{compact Hausdorff spaces}\\ \text{and continuous maps}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{C(\cdot)} \left\{\begin{matrix}\text{unital commutative } C^*\text{-algebras}\\ \text{and } *\text{-homomorphisms}\end{matrix}\right\}.$$

The main idea of *noncommutative* topology is to transfer the important notions and results about compact spaces via the above equivalence and then check whether the assumption of commutativity can be dropped. In most cases, this process is far from obvious, but it profits both sides of the equivalence.

The beginnings of both noncommutative geometry [19] and compact quantum groups [89] can be traced back to the 1980 seminal papers: Connes [18] and Woronowicz [90]. Although these two topics are naturally combined in the study of quantum dynamical systems, i.e. actions of quantum groups on C*-algebras, a general definition of free and proper actions of locally compact quantum groups on C*-algebras was proposed only 20 years later [25]. In the unital (compact case), this definition is just a slight modification of Woronowicz's cancellation properties that define a compact quantum group, and has been successfully reconciled in [22, 8, 6] with other definitions of freeness [74] and Hopf–Galois theory [41]. In particular, Woronowicz's Peter–Weyl theory of compact quantum groups has been extended to compact quantum principal bundles in [6].

Given working theory and abundant examples of compact quantum principal bundles, a natural next step was to consider the concept of local triviality of such bundles. Although, first attempts to define local triviality took place already in 1994 (see [65, 13], cf. [14, 31]), well before the concept of a compact quantum principal bundle crystallized, the notion of a *locally* trivial compact Hausdorff principal bundle resisted its successful generalization to inherently *global* noncommutative topology. A key problem in imposing the local-triviality condition in this setting was the lack of a C*-algebraic formulation of the notion of an *open* cover. In fact, the aforementioned attempts to define local triviality used a noncommutative generalization of finite *closed* covers [29], so they lead to the concept of *piecewise* (rather than locally) trivial compact quantum principal bundles [32]. However, this did not solve the problem of introducing local triviality of principal bundles to noncommutative geometry as a piecewise trivial compact Hausdorff principal bundle need not be locally trivial [9].

The aim of the thesis is to solve the aforementioned problem of defining a locally trivial compact quantum principal bundle. We achieve this by introducing the *local-triviality dimension*. Finiteness of the local-triviality dimension is taken as the definition of local triviality of a compact quantum principal bundle. In the classical case of compact Hausdorff group acting on a compact Hausdorff space, we recover the usual notion of a locally trivial principal bundle.

Definition *Let $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$ be a compact quantum group acting on a unital C*-algebra A. We say that A has the* local-triviality dimension *equal to $n \in \mathbb{N}$, written $\dim_{\mathrm{LT}}^{\mathbb{G}}(A) = n$, if n is the minimal number for which there exist $\mathbb{G}$-equivariant unital $*$-homomorphisms*

$$\rho_i : \mathcal{C}C(\mathbb{G}) \longrightarrow A, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

such that $\sum_i \rho_i(\mathfrak{t}) = 1$. We set $\dim_{\mathrm{LT}}^{\mathbb{G}}(A) = \infty$ if no such n exists. Here $\mathcal{C}C(\mathbb{G})$ denotes the unreduced cone of the C-algebra $C(\mathbb{G})$ and $\mathfrak{t}$ is the height function of $\mathcal{C}C(\mathbb{G})$.* ⋄

The thesis is based on the following three preprints:

1. A. Chirvasitu, L. Dąbrowski, M. Tobolski. The weak Hilbert–Smith conjecture from a Borsuk–Ulam-type conjecture. arXiv:1612.09567.

2. E. Gardella, P. M. Hajac, M. Tobolski, Jianchao Wu. The local-triviality dimension of actions of compact quantum groups. arXiv:1801.00767.

3. A. Chirvasitu, B. Passer, M. Tobolski. Equivariant Dimensions of Graph C*-algebras. arXiv:1907.10010.

Following the physicists nomenclature, the manuscript is divided into: the *classical* case (group actions on spaces), the *semiclassical* case (group actions on C*-algebras), and the *quantum* case (quantum group actions on C*-algebras).

The first chapter focuses on clarifying the results from classical algebraic topology needed in the subsequent chapters. The notion of a locally trivial principal bundle is reformulated using invariants such as *the Schwarz genus* [76] and the *G-index* [46]. Next, we present a proof of the following theorem:

Theorem *Let G be a non-trivial compact Hausdorff group. Then, there is no G-equivariant continuous map $E_{n+1}G \to E_nG$.*

Here E_nG denotes the join of $(n+1)$-copies of G. Our proof follows the strategy of an unpublished proof of the above theorem in the case when G is a non-trivial zero-dimensional compact Hausdorff group due to Bestvina and Edwards. For locally trivial compact principal bundles the above theorem is equivalent to the (commutative) *Borsuk–Ulam-type conjecture* of Baum, Dąbrowski and Hajac [7]. In its full generality, the Baum–Dąbrowski–Hajac conjecture implies a weaker version of the *Hilbert–Smith conjecture* [77] via the *Ageev conjecture* [1]. This implication was proved in the first of the three aforementioned preprints.

In the second chapter, we introduce three variants of the *local-triviality dimension* of an action of a compact Hausdorff group on a unital C*-algebra. This definition is inspired by *noncommutative* Borsuk–Ulam-type conjectures [7] and the *Rokhlin dimension* [35], which plays a crucial role in the recent breakthrough in the classification programme of simple separable nuclear unital C*-algebras. Our definition recovers the classical notion of a (locally trivial) principal bundle, which can be proved using the results from the first chapter. We also show that the local-triviality dimension differs from the Rokhlin dimension when we go outside of compact-Lie-group actions on compact metrizable spaces. Next, we introduce C*-algebras that are *n-universal* for actions with finite local-triviality dimension. For the strong variant of the dimension, these are the C*-algebras of functions on the join of $(n+1)$-copies of the compact Hausdorff group considered. For the plain variant of the dimension, it is a C*-algebra obtained by a similar construction to the join construction, which makes use of the notion of the unital *free product* of C*-algebras. As a main application, we partially prove the semiclassical Borsuk–Ulam-type conjecture:

Theorem *Let G be a non-trivial compact Hausdorff group acting on a unital C*-algebra A such that* $\dim_{\mathrm{LT}}^{G}(A) < \infty$*. Then, there does not exists a G-equivariant $*$-homomorphism $A \to A \circledast C(G)$.*

Here $\circledast$ is the *noncommutative join* of C*-algebras [21].

In the third chapter, the notion of the local-triviality dimension is generalized to actions of *compact quantum groups* on unital C*-algebras. Local triviality in that sense implies freeness of the given action. We also introduce the definition of an *n-universal* compact quantum principal bundle, which is the first step in defining the classifying space of a given compact quantum group. Finally, we generalize the aforementioned semiclassical Borsuk–Ulam-type result:

Theorem *Let A be a unital C*-algebra equipped with an action of a non-trivial compact quantum group $\mathbb{G}$ admitting a non-trivial classical subgroup H such that* $\dim_{\mathrm{LT}}^{H}(A) < \infty$*. Then, there is no $\mathbb{G}$-equivariant $*$-homomorphism $A \to A \circledast^{\delta} C(\mathbb{G})$.*

Here $\circledast^{\delta}$ is the equivariant noncommutative join [21].

The above theorem, together with the result of Dąbrowski, Hajac, and Neshveyev [23], is the state-of-the-art partial confirmation of the Baum–Dąbrowski–Hajac conjecture.