Streszczenie rozprawy doktorskiej

Mateusz Wasilewski

Niniejsza rozprawa dostarcza nowych wyników w dziedzinie algebr operatorów, głównie w teorii algebr von Neumanna. Badamy deformacje algebr stowarzyszonych z wolnymi produktami grup. Mimo że rozumiemy tę rodzinę dość dobrze, musimy zmierzyć się z pewnymi trudnościami. Szczególnie interesujące są przypadki, w których te algebry wykazują podobieństwo do swoich niezdeformowanych odpowiedników, ponieważ dowody muszą być niezależne od deformacji, przez co pokazują, że pewne cechy algebr niezdeformowanych, które posiadają lepsze własności, nie odgrywają roli w dowodach. Z drugiej strony, te zdeformowane algebry tworzą szeroką klasę obiektów, których analiza powinna ujawnić nowe zjawiska.

W teorii algebr operatorów wyróżniamy dwa główne nurty: teorię algebr von Neumanna oraz teorię C^*-algebr. Jak wspomniano powyżej, będziemy zajmować się głównią tą pierwszą, jednak przedstawimy również pewne zastosowania naszej pracy dla C^*-algebr. Pierwszym ważnym wynikiem w teorii C^*-algebr jest twierdzenie Gelfanda–Najmarka (por. [GN43]), zgodnie z którym „abstrakcyjna" oraz „konkretna" definicja C^*-algebry jest w istocie tym samym; można o tym myśleć jak o C^*-algebraicznym odpowiedniku twierdzenia Cayleya z teorii grup. Podstawy teorii algebr von Neumanna zostały rozwinięte w serii prac Murraya i von Neumanna (por. [MVN36], [MvN37], [vN40], [MvN43]).

Źródeł teorii algebr operatorów należy doszukiwać się w mechanice kwantowej, gdyż dostarcza ona odpowiedniego matematycznego formalizmu do opisu fizyki. Dzieje się tak, ponieważ twórcy teorii kwantowej modelowali obserwable układów kwantowych za pomocą nieskończonych macierzy, które należy traktować jako operatory na przestrzeni Hilberta. Co więcej, zasada nieoznaczoności Heisenberga sprawia, że niektóre z tych operatorów nie mogą komutować, więc naturalne staje się badanie zbiorów niekoniecznie komutujących operatorów; tym właśnie, z grubsza, zajmuje się teoria algebr operatorów.

Znane są również związki z innymi działami matematyki, między innymi z teorią reprezentacji oraz teorią ergodyczną. W przypadku teorii reprezentacji łatwo to opisać: jeśli mamy daną unitarną reprezentację pewnej grupy, to zbiór operatorów komutujących ze wszystkimi operatorami unitarnymi pochodzącymi z tej reprezentacji tworzy algebrę von Neumanna. Ta algebra von Neumanna, zwana komutantem, służy do opisu przestrzeni niezmienniczych, więc jest istotna, jeśli chcemy rozłożyć reprezentację na sumę prostszych kawałków. Przykład ten również można skojarzyć z mechaniką kwantową, w której używa się reprezentacji unitarnych do opisu symetrii. Algebry von Neumanna można związać z teorią ergodyczną poprzez produkt krzyżowy, konstrukcję, która pozwala zbudować algebrę von Neumanna z działania grupy na przestrzeni z miarą; wiele własności działania można wywnioskować ze struktury powstałej algebry von Neumanna. Korzyść jest obopólna – przykłady znane z teorii ergodycznej pozwalają konstruować nietypowe algebry von Neumanna.

Będziemy badać dwie rodziny algebr von Neumanna: q-zdeformowane algebry Arakiego–Woodsa oraz algebry Heckego-von Neumanna. Pierwsza z nich powstaje dzięki dwuetapowej konstrukcji, której punktem wyjścia są faktory grup wolnych, natomiast w drugim przypadku mamy do czynienia z q-deformacją algebry grupowej grupy Coxetera.

Motywację dla zajmowania się q-zdeformowanymi algebrami Arakiego–Woodsa stanowią: formalizm kwantowej teorii pola wykorzystujący algebry operatorów (kanoniczne relacje (anty)komutacji) oraz nieprzemienny rachunek prawdopodobieństwa (por. [BS91]). Algebry Heckego–von Neumanna przydają się do zdefiniowania L^2-kohomologii grup Coxetera (por. [Dym06] and [DDJO07]), gdzie wymiar von Neumanna dla modułów nad algebrami Heckego–von Neumanna jest kluczowym narzędziem.

Własności algebr von Neumanna omawiane w tej rozprawie są bardzo klasyczne. W przypadku algebr Heckego–von Neumanna badamy maksymalne przemienne podalgebry; temat ten jest bardzo dokładnie omówiony w książce [SS08]. Prezentujemy również nowe wyniki na temat własności aproksymacji q-zdeformowanych algebr Arakiego–Woodsa. Własności te mogą być rozumiane jako osłabienia średniowalności, która w teorii algebr von Neumanna posiada wiele różnych nazw: injektywność, półdyskretność, hiperskończoność itp. Równoważność tych pojęć jest owocem przełomowej pracy Connes'a (por. [Con76]); rezultaty te pozwoliły również sklasyfikować wszystkie injektywne faktory (działające na ośrodkowej przestrzeni Hilberta). Własność Haagerupa oraz całkowita metryczna własność aproksymacji mogą służyć jako zamienniki średniowalności, które w pewnych przypadkach pozwalają uzyskiwać podobne wyniki. Innowacyjność podejścia prezentowanego w tej rozprawie polega na tym, że badamy własności aproksymacji dla algebr nieśladowych, natomiast większość poprzednich rezultatów dotyczy algebr śladowych.

Omówimy teraz pokrótce strukturę rozprawy. W rozdziale drugim wprowadzamy techniczne zaplecze naszej pracy, głównie z teorii algebr von Neumanna; omawiamy wyniki, które uważane są obecnie za klasyczne. W rozdziale trzecim opowiadamy o dwóch własnościach aproksymacji kluczowych dla tego tekstu, nie zapominając o ich źródłach oraz o motywacji. Rozdział czwarty jest poświęcony q-zdeformowanym algebrom von Neumanna, najważniejszym obiektom opisywanym w tej rozprawie. Opisujemy wiele przydatnych własności tych algebr oraz konstrukcji ważnych przy analizie ich własności. Oferujemy również przegląd znanych wyników. W rozdziale piątym zawarte są dowody twierdzeń, które uważamy za nasze najważniejsze rezultaty. Poniżej przedstawiamy listę tych wyników i omawiamy je w dużym skrócie.

Twierdzenie A ([Was17, Theorem 1.1.])**.** *Dowolna q-zdeformowana algebra Arakiego–Woodsa posiada własność Haagerupa.*

To twierdzenie znacząco powiększa klasę nieśladowych algebr von Neumanna z własnością Haagerupa, która została wprowadzona w tym kontekście bardzo niedawno (por. [CS15] i [OT15]).

Twierdzenie B ([ABW18, Theorem 1.1.])**.** *Dowolna q-zdeformowana algebra Arakiego–Woodsa posiada w^*-całkowitą własność aproksymacji.*

Jest to rozszerzenie jednego z głównych wyników pracy [HR11], w której rozważany był przypadek $q = 0$; metody są zupełnie inne. Dzięki temu twierdzeniu będzie można badać q-zdeformowane algebry Arakiego–Woodsa przy użyciu metod wprowadzonych przez Popę (por. [BHV15] dla przypadku $q = 0$).

Twierdzenie C ([CSW17, Theorem 2.5., Theorem 3.7., and Corollary 3.9.])**.** *Radialna podalgebra w algebrze Heckego–von Neumanna grupy $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*k}$ ($k \geqslant 3$) jest singularną maksymalną podalgebrą abelową z niezmiennikiem Pukánszky'ego równym ∞.*

Jest to odpowiednik słynnego wyniku Rădulescu (por. [Răd91]). Co więcej, algebry von Neumanna występujące w treści twierdzenia są izomorficzne z tak zwanymi interpolowanymi faktorami grup wolnych (por. [Răd94] i [Dyk94]), więc dostajemy analogon radialnej podalgebry w tym kontekście.

Twierdzenie D ([CSW17, Proposition 4.12])**.** *W algebrze q-Gaussowskiej różne podalgebry generatorowe nie są sprzężone przez automorfizm wewnętrzny.*

Jest to odpowiednik znanego faktu, że różne podalgebry operatorowe w faktorze grupy wolnej nie są sprzężone przez automorfizm wewnętrzny (por. [Pop83, Lemma 4.3]).

Literatura

[ABW18] Stephen Avsec, Michael Brannan, and Mateusz Wasilewski. Complete metric approximation property for q-Araki–Woods algebras. *J. Funct. Anal.*, 274(2):544–572, 2018.

[BHV15] Rémi Boutonnet, Cyril Houdayer, and Stefaan Vaes. Strong solidity of free Araki-Woods factors, 2015. arXiv:1512.04820, to appear in American Journal of Mathematics.

[BS91] Marek Bożejko and Roland Speicher. An example of a generalized Brownian motion. *Comm. Math. Phys.*, 137(3):519–531, 1991.

[Con76] A. Connes. Classification of injective factors. Cases II_1, II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$. *Ann. of Math. (2)*, 104(1):73–115, 1976.

[CS15] Martijn Caspers and Adam Skalski. The Haagerup Property for Arbitrary von Neumann Algebras. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19):9857–9887, 2015.

[CSW17] Martijn Caspers, Adam Skalski, and Mateusz Wasilewski. On MASAs in q-deformed von Neumann algebras, 2017. arXiv:1704.02804.

[DDJO07] Michael W. Davis, Jan Dymara, Tadeusz Januszkiewicz, and Boris Okun. Weighted L^2-cohomology of Coxeter groups. *Geom. Topol.*, 11:47–138, 2007.

[Dyk94] Ken Dykema. Interpolated free group factors. *Pacific J. Math.*, 163(1):123–135, 1994.

[Dym06] Jan Dymara. Thin buildings. *Geom. Topol.*, 10:667–694, 2006.

[GN43] I. Gelfand and M. Neumark. On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 12(54):197–213, 1943.

[HR11] Cyril Houdayer and Éric Ricard. Approximation properties and absence of Cartan subalgebra for free Araki-Woods factors. *Adv. Math.*, 228(2):764–802, 2011.

[MVN36] F. J. Murray and J. Von Neumann. On rings of operators. *Ann. of Math. (2)*, 37(1):116–229, 1936.

[MvN37] F. J. Murray and J. von Neumann. On rings of operators. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41(2):208–248, 1937.

[MvN43] F. J. Murray and J. von Neumann. On rings of operators. IV. *Ann. of Math. (2)*, 44:716–808, 1943.

[OT15] Rui Okayasu and Reiji Tomatsu. Haagerup approximation property for arbitrary von Neumann algebras. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 51(3):567–603, 2015.

[Pop83] Sorin Popa. Orthogonal pairs of $*$-subalgebras in finite von Neumann algebras. *J. Operator Theory*, 9(2):253–268, 1983.

[Răd91] Florin Rădulescu. Singularity of the radial subalgebra of $\mathcal{L}(F_N)$ and the Pukánszky invariant. *Pacific J. Math.*, 151(2):297–306, 1991.

[Răd94] Florin Rădulescu. Random matrices, amalgamated free products and subfactors of the von Neumann algebra of a free group, of noninteger index. *Invent. Math.*, 115(2):347–389, 1994.

[SS08] Allan M. Sinclair and Roger R. Smith. *Finite von Neumann algebras and masas*, volume 351 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[vN40] J. v. Neumann. On rings of operators. III. *Ann. of Math. (2)*, 41:94–161, 1940.

[Was17] Mateusz Wasilewski. q-Araki-Woods algebras: extension of second quantisation and Haagerup approximation property. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145(12):5287–5298, 2017.