Streszczenie

Tematem przewodnim rozprawy jest badanie własności algebry miar na okręgu ze szczególnym uwzględnieniem zagadnień spektralnych. W naturalny sposób umiejscawia to niniejszą pracę na styku teorii algebr Banacha i przemiennej analizy harmonicznej. Rozważane problemy mają klasyczne źródła, lecz często w czasach ich największej popularności nie zostały one w zadowalający sposób rozwiązane. Bez wątpienia pierwszą istotną w tej tematyce publikacją był artykuł N. Wienera i H.R. Pitta ([WP]) z 1938 roku, w którym zostało po raz pierwszy zaobserwowane, mówiąc we współczesnym języku, iż miara o oddzielonych od zera współczynnikach Fouriera-Stieltjesa może nie być odwracalna. W uznaniu dla autorów sytuacja, gdy spektrum miary jest istotnie większe od domknięcia zbioru wartości transformaty Fouriera-Stieltjesa, jest nazywana fenomenem Wienera-Pitta. Pionierskie prace I.M. Gelfanda dotyczące przemiennych algebr Banacha pozwoliły potem na użycie odpowiedniego do opisu tego zjawiska języka oraz zrozumienie istoty tego zagadnienia. Jak się okazało, fenomen Wienera-Pitta jest tylko jednym z przejawów niezwykłego skomplikowania przestrzeni ideałów maksymalnych algebry miar. Korzystając z aparatu teorii Gelfanda, udało się w latach pięćdziesiątych udowodnić istnienie tego zjawiska w algebrach miar na dowolnych grupach lokalnie zwartych abelowych (prace [S] i [W]). W kolejnych latach tym tematem zajmowało się wielu autorów, wśród których warto wymienić C.C. Grahama ([Gr], [GM]),F. Parreau ([P]), W. Rudina ([R1]) i M. Zafrana (artykuł [Zaf]). Wraz z końcem dwudziestego wieku badania w tym zakresie straciły nieco na popularności, ale moim zdaniem było to spowodowane głównie dużymi trudnościami w osiągnięciu nowych wyników, gdyż na brak ciekawych problemów trudno tutaj narzekać.

Sama rozprawa podzielona jest na sześć rozdziałów. Pierwszy z nich ma charakter wprowadzający i służy zebraniu potrzebnych w dalszej części wywodu faktów oraz ustaleniu notacji. Omawiamy w nim kolejno używane potem zagadnienia z teorii miary i algebr Banacha. Następnie przechodzimy do szczegółowych informacji o algebrze miar na okręgu, omawiając pojęcie naturalności spektrum, produkty Riesza, a także najważniejsze tezy z artykułu M. Zafrana ([Zaf]). Każdy z następnych rozdziałów jest wyborem najważniejszych fragmentów bądź pełnym przedstawieniem jednej z prac mojego autorstwa. Tak więc treść rozdziału drugiego jest wiernym odwzorowaniem publikacji [O] dotyczącej elementarnego dowodu twierdzenia Hatoriego i Sato ([HS]) o rozkładzie dowolnej miary na sumę dwóch miar o naturalnym spektrum oraz miary dyskretnej dla algebry miar na okręgu. Część "Miary rozsądne" skupiona jest wokół napisanej we współpracy z drem hab. Michałem Wojciechowskim publikacji [OW2] (przyjętej do druku w St. Petersburg Mathematical Journal). Motywacją do napisania tej pracy był fakt, iż zbiór miar o naturalnym spektrum nie jest zamknięty na dodawanie i wobec tego narzuca się pomysł zbadania zbioru miar, które zaburzają miary o naturalnym spektrum do miar o naturalnym spektrum (takie miary nazwaliśmy spektralnie rozsądnymi).

Określony w ten sposób zbiór okazuje się mieć strukturę algebry Banacha. W dalszym ciągu tego rozdziału dowodzimy, że miary Zafrana są spektralnie rozsądne, ale miary dyskretne, z wyjątkiem wielokrotności δ_0, nie mają tej własności. Następny rozdział dotyczy topologicznych własności przestrzeni ideałów maksymalnych algebry miar na okręgu. Jego treść to zestaw najważniejszych wyników z preprintów [OW3] i [OW4], z których wartym podkreślenia jest dowód istnienia nieprzeliczalnie wielu parami rozłącznych podzbiorów otwartych w przestrzeni ideałów maksymalnych algebry miar na okręgu, co pociąga za sobą nieośrodkowość tej przestrzeni i pozwala w nowy sposób spojrzeć na teorię spektralną miar. Rozdział piąty to szczegółowe omówienie artykułu [OW1], w którym dowodzimy istnienie nieskończonego zbioru o tej własności, iż każda miara, której transformata Fouriera-Stieltjesa przyjmuje wartości tylko z tego zbioru, ma naturalne spektrum. Na koniec konstruujemy przykład miary singularnej spełniającej te założenia. Ostatnia część to planowane do publikacji wyniki dotyczące zbieżności potęg splotowych miar.