Uniwersytet Warszawski

Stanisław Betley
Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

09.04.2018

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Pawła Bilskiego

zatytułowanej

T_0-przestrzenie Aleksandrowa, ich granice, własności i zastosowania

(W całej recenzji referencje podawane są zgodnie z bibliografią rozprawy.)

Przestrzenią Aleksandrowa nazywamy przestrzeń topologiczną, w której część wspólna dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest otwarta. Przestrzenie o tej własności, które są T_1 muszą być dyskretne, a wiec mało ciekawe z punktu widzenia topologii. Każda przestrzeń Aleksandrowa ma minimalną bazę złożoną z przecięć wszystkich zbiorów otwartych zawierających wybrany punkt przestrzeni. To pozwala związać z każdą przestrzenią Aleksandrowa X praporządek na X wynikający z inkluzji zbiorów bazy minimalnej. Łatwo widać, że praporządek na zbiorze X generuje w X topologię Aleksandrowa, która jest T_0 o ile praporządek jest porządkiem częściowym. Podobnie odwzorowanie ciągłe przestrzeni Aleksandrowa $X \to Y$ indukuje zachowujące praporządek odwzorowanie zbiorów z praporządkami $X \to Y$ i vice versa. Dlatego też przestrzenie Aleksandrowa będziemy traktować równoważnie jako przestrzenie topologiczne bądź zbiory z praporządkami. Przestrzenie Aleksandrowa, które są T_0 będziemy nazywać A-przestrzeniami.

Przestrzenie Aleksandrowa wzbudziły pewne zainteresowanie matematyków zajmujących się teorią homotopii i ogólniej topologią algebraiczną już w latach sześćdziesiątych ubiegłego stulecia gdy Stong podał w [75] klasyfikację homotopijną skończonych A-przestrzeni a MacCord w [56] udowodnił, że dowolny kompleks symplicjalny K jest słabo homotopijnie równoważny z A-przestrzenią $\chi(K)$ otrzymaną ze zbioru sympleksów K uporządkowanego przez relację zawierania. Odwzorowanie ustalające tę słabą homotopijną równoważność odwzorowuje punkt x z realizacji geometrycznej K w jego nośnik. Twierdzenia te nie znalazły przez wiele lat żadnych zastosowań (znanych autorowi recenzji) bo ograniczenie się do skończonej liczby punktów (dla skończonego K) nie ułatwia przeprowadzania rozumowań homotopijnych w klasycznym sensie. Takie podejście może mieć istotne znaczenie przy badaniu prostego typu homotopii ale te zagadnienia są dalekie od rozprawy doktorskiej magistra Bilskiego. W bieżącym stuleciu przestrzenie Aleksandrowa i ich homotopijna klasyfikacja spotkały się ze wzrostem zainteresowania związanym z głębszym zainteresowaniem strukturami dyskretnymi i ich modyfikacjami, które często sa stymulowane badaniami związanymi z informatyką teoretyczną.

Zawartość merytoryczna rozprawy. W swojej rozprawie magister Paweł Bilski podejmuje dwa problemy badawcze. W początkowej części pracy zajmuje się uogólnieniem liczby Lefschetza dla odwzorowań skończonych A-przestrzeni i jej aksjomatyzacją. Przypomnijmy: liczbą Lefschetza odwzorowania $f : K \to K$ dla kompleksu symplicjalnego K wymiaru n jest

$$\Lambda(f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot tr(f_{*i})$$

gdzie f_* jest przekształceniem indukowanym przez f na grupach homologii K ze współczynnikami w Q. Niezerowość liczby $\Lambda(f)$ implikuje istnienie punktu stałego dla odwzorowania f i stąd wynika jej istotna rola w badaniach topologicznych.

Skończona A-przestrzeń X definiuje skończony kompleks symplicjalny $K(X)$, dla którego częściowy porządek na zbiorze sympleksów jest zdeterminowany przez łańcuchy w porządku opisanym wcześniej na zbiorze X a odwzorowanie A-przestrzeni $X \to Y$ indukuje symplicjalne $K(X) \to K(Y)$. Aksjomatyzacja liczby Lefschetza dla kompleksów symplicjalnych została podana w [2], a ponieważ ta liczba dla A-przestrzeni jest definiowana przez homologie $K(X)$ to dowody aksjomatyzacji w omawianej pracy doktorskiej redukują się do sprawdzenia, że w języku A-przestrzeni wszystkie kroki dowodów dają się poprawnie wyrazić i przeprowadzić. Autor wykazał się tu dobrą znajomością technik geometrii symplicjalnej ale rezultat był od początku raczej oczywisty. Formalnie rzecz ujmując słowo "uogólniona" odnosi się do faktu, że autor definiuje liczbę Lefschetza dla odwzorowania A-przestrzeni $\tilde{X} \to X$, gdzie $\tilde{X}$ jest podziałem X. Niestety definicja dowolnego podziału A-przestrzeni jest tak enigmatyczna (patrz str. 45 rozprawy), iż biorąc ją literalnie nie widać dlaczego stwierdzenie, że pewien podział barycentryczny X jest podpodziałem $\tilde{X}$ miałoby być prawdziwe. Fakt ten jest kluczowy dla istnienia odwzorowania $\tilde{sup}$ ze strony 59, fundamentalnego dla istnienia uogólnionej liczby Lefschetza w sensie Bilskiego. Wydaje się, że ta sprawa może być łatwo doprecyzowana i moją większą troską jest brak jakiegokolwiek przykładu pokazującego dlaczego takie uogólnienie może być użyteczne.

Drugim zagadnieniem badawczym magistra Bilskiego było wykorzystanie granic odwrotnych systemów A-przestrzeni do różnych konstrukcji topologicznych. W rozdziale czwartym rozprawy pokazane są różne konstrukcje, nowe bądź znane z literatury, pozwalające utożsamiać przestrzenie topologiczne z granicami odwrotnymi A-przestrzeni bądź też z ich szczególnymi podzbiorami. Najogólniejszym jest tu twierdzenie 4.34 mówiące, że każda przestrzeń topologiczna jest homeomorficzna z granicą odwrotną systemu przestrzeni Aleksandrowa, z których każda jest homotopijnie równoważna ze skończoną A-przestrzenią. Dla danej przestrzeni X z topologią $\mathcal{T}$ odpowiedni system jest skonstruowany na bazie wszystkich skończonych podtopologii $\mathcal{T}$ uporządkowanych przez inkluzję więc odwzorowanie z X w granicę odwrotna jest w sensie zbiorów identycznością na każdej współrzędnej. Dowód homeomorficzności jest prosty i można przypuszczać, że to twierdzenie nie jest (chyba) zapisane w literaturze przedmiotu tylko dlatego, że nie widać sytuacji, w której mogłoby być użyteczne. Przestrzenie występujące w systemie odwrotnym mają bardzo słabe topologie i konstrukcja ta nie pasuje do standardowego poglądu w jaki sposób warto aproksymować przestrzenie. Oczywiście twierdzenie 4.34 ma walor estetyczny ze względu na swoją ogólność.

Jeśli na A-przestrzenie patrzeć jako na zbiory z praporządkiem to tak samo można patrzeć na granice odwrotne systemów A-przestrzeni, gdzie punkty są uporządkowane "po współrzędnych". Drugim wymienionym jako najważniejszy wynikiem rozdziału 4 jest twierdzenie 4.21 mówiące, że lokalnie zwarta i parazwarta przestrzeń Hausdorffa X jest homeomorficzna z przestrzenią wszystkich punktów maksymalnych granicy odwrotnej systemu A-przestrzeni. W przypadku gdy X jest dodatkowo metryczna przestrzeń punktów maksymalnych jest dodatkowo mocnym retraktem deformacyjnym granicy. Wynik ten poszerza wyniki prac [16], [77] , gdzie X jest lokalnie skończonym kompleksem symplicjalnym jak również klasyczne już wyniki opisane np. w [62] dotyczące przypadku gdy X jest przestrzenią zwartą. W omawianej pracy doktorskiej granica odwrotna jest indeksowana zbiorem L_X wszystkich lokalnie skończonych pokryć X. Ten zbiór jest uporządkowany przez relację zawierania. Dla każdego $\alpha \in L_X$ przez X_α oznaczana jest przestrzeń ilorazowa X przez relację utożsamiającą te punkty $x \in X$, dla których przecięcia zbiorów otwartych z α je zawierające sa takie same. Na przestrzeni ilorazowej łatwo wprowadzić porządek czyniący z nich A-przestrzenie. Co więcej gdy $\alpha \subseteq \beta$ to istnieje ciągłe $f : X_\beta \to X_\alpha$ i system odwrotny jest w pełni określony. Zarówno ta konstrukcja jak i dowód twierdzenia 4.21 sa inspirowane podobnymi konstrukcjami z wymienionych wcześniej prac oraz prac [24] i [72], czego autor nie ukrywa. Tym niemniej uważam, że magister Paweł Bilski wykazał się tu sporą pomysłowością i głębokim zrozumieniem nietrywialnych pojęć topologicznych jak i umiejętnością przeprowadzania nietrywialnych rozumowań. Jest to w mojej opinii najbardziej wartościowy fragment omawianej rozprawy. Ale znowu trochę jest mi brak jakiegoś zastosowania zaprezentowanej konstrukcji.

Ostatnia część rozdziału 4 rozprawy poświęcona jest porównaniu dwóch klasycznych konstrukcji, podobnych do opisanej powyżej konstrukcji systemu A-przestrzeni dla pokryć lokalnie skończonych. Jedna opiera się na skończonych pokryciach a druga na skończonych podtopologiach i obie dla przestrzeni X prowadzą do systemów odwrotnych skończonych A przestrzeni, których granice odwrotne oznaczane są odpowiednio $\mathcal{FL}(X)$ (od nazwiska Flachsmeyer, [24]) i $\mathcal{SH}(X)$ (od nazwiska Shiraki, [72]). Przestrzeń X zanurza się w nie w sposób w ciągły na zbiór punktów maksymalnych X_∞, który przy dodatkowych założeniach jest uzwarceniem X. Już w latach sześćdziesiątych Hochster zauważył ([38]), że granica odwrotna systemu skończonych A-przestrzeni jest przestrzenią spektralną tj. homeomorficzną ze $Spec(A)$ z topologią Zariskiego dla pewnego pierścienia przemiennego A. Podrozdział 4.5 omawianej rozprawy poświęcony jest uzasadnieniu, że obie konstrukcje $\mathcal{FL}$ i $\mathcal{SH}$ prowadzą do izomorficznych funktorów $Top \to Spec$, gdzie $Spec$ oznacza pełną podkategorię w Top przestrzeni spektralnych.

Przypomnijmy, że jeśli $\mathcal{C}$ jest podkategorią w $\mathcal{D}$ to $\mathcal{C}$ nazywamy kategorią reflektywną o ile istnieje funktor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, lewo-sprzężony z funktorem włożenia $i : \mathcal{C} \to D$. Funktor F nazywany jest reflektorem kategorii $\mathcal{C}$ a morfizm $d \to F(d)$ $\mathcal{C}$-reflektem obiektu $d \in \mathcal{D}$. Piąty rozdział omawianej rozprawy poświęcony jest przykładom wykorzystania A-przestrzeni do konstrukcji reflektorów dla pewnych podkategorii kategorii Top. Rozdział ten zawiera mnóstwo konstrukcji i opisów ale bardzo trudno pomiędzy nimi znaleźć oryginalne wyniki autora rozprawy. Po przedstawieniu w podrozdziale 5.1 już klasycznych konstrukcji reflektorów dla kategorii $\mathbf{T}_i$ dla $i = 0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$ autor przechodzi w części 5.2 do studiowania refelektywności kategorii przestrzeni trzeźwych (ozn. Sob) i spektralnych przy czym te drugie są rozważane jako pełna podkategoria Top oznaczana $Spec$ bądź jako podkategoria przestrzeni spektralnych ($Spec^*$), gdzie rozważamy tylko odwzorowania spektralne. Obraz przestrzeni X dla reflektora $Top \to Sob$ nazywany jest otrzeźwieniem X i oznaczany $\mathbf{S}(X)$ a obraz reflektora $Top \to Spec$ spektralizacją tej przestrzeni. Rozdział zaczyna się od podania za [29] reflektora dla Sob. Następnie opisane sa różne konstrukcje reflektorów dla $Spec^*$ i wkładem autora jest tu uzasadnienie, że formalnie różne konstrukcje tychże pochodzące z prac [6],[68],[69 i [70] dają naturalnie izomorficzne funktory i wszystkie one są izomorficzne z funktorem $\mathcal{SH}(X)$. Wiadomo, że kategoria $Spec$ nie jest reflektywna bo nie jest zamknięta ze względu na wszystkie granice. Ale z faktu, że $Spec^*$ jest reflektywna wynika, że $Spec$ jest słabo reflektywna tzn. faktoryzacja dowolnego morfizmu $f : X \to Y$, gdzie $Y \in Spec$, przez $Spec$-reflekt przestrzeni X istnieje ale nie jest wyznaczona w sposób jednoznaczny.

Podrozdział 5.3 nawiązuje do geometrii algebraicznej. Badany jest związek pomiędzy otrzeźwieniem a spektralizacją dla przestrzeni afinicznej $\mathbf{A}^n(K)$ nad ciałem K. Skonstruowane jest włożenie $\mathbf{S}(\mathbf{A}^n(K))$ w przestrzeń $Spec(K[X_1, ..., x_n])$. Najciekawszym wynikiem wydaje się tu wniosek, że dla ciała algebraicznie domkniętego to włożenie jest homeomorfizmem a ponadto obie przestrzenie sa homeomorficzne ze spektralizacją $\mathbf{A}^n(K)$. Z drugiej strony obserwacja, że spektralizacja przestrzeni afinicznej daje w wyniku przestrzeń $Spec(K[X_1, ..., x_n])$ jest raczej dobrze znana geometrom algebraicznym. W rozdziale nie ma żadnych istotnych zastosowań otrzymanych wyników np. dla geometrii algebraicznej. W części 5.4 badane są związki pomiędzy $Spec(C(X))$ a przestrzenią $\mathcal{SR}(X)$, gdzie dla przestrzeni topologicznej X, $C(X)$ oznacza pierścień funkcji rzeczywistych na X a $\mathcal{SR}(X)$ jest zbiorem filtrów pierwszych w kracie podzbiorów domkniętych X z odpowiednio zdefiniowaną topologią. Skonstruowane jest ciągłe i spektralne odwzorowanie

$$\mathcal{SR}(X) \to Spec(C(X)),$$

które zadaje homeomorfizm na podprzestrzeniach tzw. z-filtrów w $\mathcal{SR}(X)$ i z-ideałów pierwszych w $Spec(C(X))$. Litera z odnosi się tu do pewnych podzbiorów, których definicji nie będę przytaczać. Może warto tylko wspomnieć, że każdy ideał maksymalny jest z-ideałem. Z faktu, że $\mathcal{SR}(X)$ jest jedna z emanacji reflektora spektralizacji (studiowanego w rozdziale 5.2) wynika, że naturalne odwzorowanie $X \to Spec(C(X))$ odwzorowujące $x \in X$ w ideał maksymalny funkcji zerujących się w x faktoryzuje się przez $\mathcal{SR}(X)$. Podrozdział kończy się dwiema obserwacjami, wynikającymi łatwo ze wcześniejszych rozważań. Pierwsza mówi, że dla przestrzeni doskonale normalnych przestrzeń $\mathcal{SR}(X)$ jest homeomorficzna z $zSpec(C(X))$. Druga mówi, że włożenie Kiryłowa $\beta(X) \to Spec(C(X))$ na podprzestrzeń ideałów maksymalnych faktoryzuje się przez $\mathcal{SR}(X)$. Notacja $\beta(X)$ oznacza tu uzwarcenie Čecha-Stone'a przestrzeni X.

W części 5.5 badane są przestrzenie stabilnie zwarte. Nie ma tu istotnych wyników. Pokazuje jest tylko w paru linijkach, że twierdzenie Johnstone'a ([29]) charakteryzujące dowolną przestrzeń stabilnie zwartą jaką tę, która jest retraktem przestrzeni spektralnej można zamienić na podobne, gdzie dowolna przestrzeń spektralna zamieniona jest na przestrzeń $\mathcal{SH}(X)$. Na koniec tej części pojawia się prosty wniosek, że każda przestrzeń stabilnie zwarta jest granica diagramu przestrzeni spektralnych. Rozprawa kończy się nową charakteryzacja tzw. podkategorii epireflektywnych w Top tzn. takich podkategorii reflektywnych $\mathcal{C}$ w Top dla których $\mathcal{C}$-reflekty sa epimorfizmami. W stwierdzeniu 5.47 udowodnione jest, że pełna podkategoria $\mathcal{C}$ w $\mathbf{T}_0$ jest epireflektywna w Top wtedy i tylko wtedy gdy jest zamknięta na podprzestrzenie oraz dla każdej przestrzeni topologicznej X istnieje element największy w $T_X^{\mathcal{C}}$. $T_X^{\mathcal{C}}$ jest tu rodziną podtopologii $\tau \in T_X$ takich, że ich kołmogoryfikacja jest w $\mathcal{C}$. "Kołmogoryfikacja" przestrzeni X jest zdefiniowana jako konstrukcja ilorazowa na X utożsamiająca te punkty, które maja identyczne przecięcia rodzin zbiorów otwartych zawierających te punkty. Na stwierdzenie 5.47 można patrzeć jak na uniwersalny sposób konstruowania reflektorów dla kategorii $\mathbf{T}_i$. Nie ma w pracy żadnych komentarzy na temat użyteczności tej konstrukcji.

Redakcja rozprawy. Moim zdanie rozprawa jest napisana w miarę starannie, czyta się ją dobrze a pewna liczba usterek literowych i tex-kompilacyjnych nie przeszkadza czytającemu. Może jedno zastrzeżenia miałbym do odsyłaczy, gdyż chociaż na ogół sa bardzo dokładne to w kilku miejscach odsyłają do długiej pracy lub książki bez dokładniejszego określenia miejsca (rozdział, numer twierdzenia itp). Żartobliwie: poważnym błędem w rozprawie jest twierdzenie, że promotorem pracy doktorskiej M.J. Thibault jest J.May. Wszyscy wiedzą, że profesor May z University of Chicago używa imienia Peter. Patrząc od strony matematycznej: dowody w rozprawie są poprawne (pomijam sprawę uogólnienia liczby Lefschetz'a), czasami zbyt rozwlekłe a czasami wprost przeciwnie, ale tak pewnie można powiedzieć o dowolnej pracy matematycznej.

Ocena rozprawy. Rozprawa doktorska magistra Bilskiego słabo jest wpasowana we współczesny nurt badań topologicznych. Dobitnie widać to czytając bibliografię rozprawy, gdzie królują pozycje klasyczne, i to zarówno w postaci książkowej jak i w postaci prac naukowych. Nie byłoby to wadą, gdyby doktorant uzyskał nowe wyniki rzucające istotnie nowe światło na wyniki sprzed lat. Tak jednak nie jest i tak naprawdę w rozprawie przede wszystkim brak jest większego wyniku, który mógłby być podstawą dla publikacji naukowej w dobrym czasopiśmie. Rozumowania w pracy są raczej proste, dowody wynikają prawie bezpośrednio z przyjętych definicji, brak jest zastosowań opisywanych konstrukcji. Tym niemniej magister Bilski porządkuje pewne sprawy w klasycznej topologii porównując różne konstrukcje reflektorów i sposoby przedstawiania przestrzeni w postaci podprzestrzeni granic odwrotnych systemów przestrzeni o ustalonym typie. Te zagadnienia sa ważne w badaniach topologicznych bo zawsze użytecznym jest widzieć badaną przestrzeń jako podprzestrzeń w przestrzeni dobrze określonego typu a badając przestrzenie odwzorowań $Top(X, Y)$ umieć przefaktoryzować funktorialnie dowolne $X \to Y$ przez określony typ przestrzeni. Taka działalność ma pewne znaczenie poznawcze i uważam, że chociaż słabo to jednak rozprawa spełnia minimalne wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Doktorant wykazał się dobrą znajomością topologii, nie gubi się w gąszczu nowych definicji a niektóre dowody, o czym wspominałem w części merytorycznej, pokazują talent doktoranta do przeprowadzania nietrywialnych rozumowań. Wnioskuję o dopuszczenie magistra Bilskiego do dalszych etapów przewodu.

S Betley

Stanisław Betley
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski