23 maja 2018

prof. dr hab. Witold Marciszewski
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Pawła Bilskiego
„T_0-przestrzenie Aleksandrowa, ich granice własności i zastosowania"

Rozprawa poświęcona jest badaniu zagadnień dotyczących przestrzeni Aleksandrowa, tj. przestrzeni topologicznych, w których przecięcie dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest otwarte. Ponieważ każda T_1-przestrzeń o tej własności jest dyskretna, nietrywialne rezultaty dotyczące przestrzeni Aleksandrowa, na ogół odnoszą się do przestrzeni, które mają tylko bardzo słabe własności oddzielania. Większość wyników rozprawy dotyczy przypadku T_0-przestrzeni Aleksandrowa, nazywanych A-przestrzeniami. Duża część wyników dotyczy skończonych przestrzeni, które w oczywisty sposób są przestrzeniami Aleksandrowa.

Znaczna część topologów ogólnych umiejscawia rozważania dotyczące takich przestrzeni poza głównym nurtem badań, niemniej są one w ostatnich dziesięcioleciach obiektem zainteresowanie pewnej grupy badaczy. Zazwyczaj, jedną z przytaczanych motywacji dla takich badań jest możliwość zastosowań w grafice komputerowej, fizyce kwantowej czy innych dziedzinach.

Klasa A-przestrzeni jest ściśle powiązana z klasą częściowych porządków: dla każdej A-przestrzeni X, możemy określić częściowy porządek na X, deklarując, że $x \leq y$ jeśli y jest w domknięciu singletona $\{x\}$; na odwrót, jeśli $\leq$ jest częściowym porządkiem na X, to rodzina zbiorów postaci $\{y \in X : y \leq x\}$ jest bazą topologii A-przestrzeni na X. Analogiczna zależność zachodzi dla klasy przestrzeni Aleksandrowa i klasy praporządków.

Wyniki autora zawarte w rozprawie, pochodzą częściowo z jego 2 artykułów opublikowanych w Glasnik Mat. i Georgian Math. J. oraz ze wspólnej pracy z promotorem, złożonej do publikacji (brak informacji o jego wkładzie w tą pracę).

Pierwszy rozdział rozprawy ma charakter wstępny.

Rozdział 2 zawiera omówienie znanych wyników dotyczących przestrzeni Aleksandrowa i A-przestrzeni. Głownie chodzi tu o związki skończonych kompleksów symplicjalnych ze skończonymi A-przestrzeniami. McCord pokazał, że każdemu skończonemu kompleksowi można w naturalny sposób przyporządkować pewną skończoną A-przestrzeń i odwrotnie, każdej skończonej A-przestrzeni odpowiada pewien skończony kompleks. Kluczową własnością jest to, że takie przyporządkowania określają słabą homotopijną równoważność pomiędzy geometrycznymi realizacjami rozważanych kompleksów i odpowiadającymi im A-przestrzeniami. Te wyniki McCorda są chyba jednym z najistotniejszych, z punktu widzenia topologii, powodów uzasadniających sensowność badania skończonych przestrzeni. Jest to niewątpliwie ciekawy rezultat, jednak kodowanie wielościanów przy pomocy skończonych przestrzeni nie budzi mojego entuzjazmu, moim zdaniem gubi się tu podstawowe geometryczne intuicje. Jedyny oryginalny wkład autora w ten rozdział to sprawdzenie minimalności (ze względu na moc) pewnych skończonych T_0-przestrzeni odpowiadających torusowi i płaszczyźnie rzutowej (tzw. h-modele), jest to raczej elementarny argument o podobnym stopniu trudności jak poszukiwanie minimalnych triangulacji tych powierzchni. Te wyliczenia pokazują, że kodowanie wielościanów przy pomocy skończonych A-przestrzeni jest bardziej skomplikowane niż za pomocą kompleksów symplicjalnych (dla torusa minimalna triangulacja ma 7 wierzchołków, a minimalny h-model ma 16 punktów).

Rozdział 3 to niezbyt udana próba przeniesienia znanych wyników dotyczących aksjomatyzacji liczby Lefschetza dla przekształceń wielościanów na przypadek przekształceń A-przestrzeni. Technika autora opiera się m.in. na pojęciu podziału A-przestrzeni, które jest zupełnie sztucznym w tym kontekście odpowiednikiem podziału kompleksu. Opisane rozumowanie nie jest też całkiem poprawne, autor używa stwierdzenia, że dla dowolnego podziału kompleksu (A-przestrzeni) istnieje drobniejszy od niego podział barycentryczny. Prosty przykład - podział odcinka na dwie części o niewymiernych proporcjach pokazuje, że to nie jest prawda.

Zdecydowanie najciekawsza i najbardziej wartościowa część rozprawy to rozdział 4. Jest tu najważniejszy moim zdaniem wynik rozprawy, twierdzenie 4.21, mówiące, że dowolna przestrzeń parazwarta i lokalnie zwarta X jest homeomorficzna z podprzestrzenią wszystkich punktów maksymalnych granicy systemu odwrotnego A-przestrzeni (chodzi tu o maksymalność w sensie porządku „po współrzędnych" indukowanego w granicy przez opisane wcześniej porządki w A-przestrzeniach). Wynik ten można zestawić z twierdzeniem Flachsmeyera, orzekającego, że przestrzeń topologiczna X jest quasi-zwartą T_1-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy jest homeomorficzna z podprzestrzenią wszystkich punktów maksymalnych granicy systemu odwrotnego skończonych A-przestrzeni. Pomysłowość i złożoność techniczna tego dowodu istotnie odbiega od pozostałych, raczej niezbyt skomplikowanych rozumowań autora z rozprawy. Łatwo zauważyć, że założenie parazwartości przestrzeni X w twierdzeniu 4.21 można osłabić do metazwartości. Rozdział ten zawiera też szereg innych wyników dotyczących granic systemów odwrotnych przestrzeni Aleksandrowa, ale ich dowody są dość elementarnymi argumentami; np. twierdzenie 4.34 to w istocie prosta (dobrze znana?) obserwacja, że każdą przestrzeń topologiczną (X, τ) można przedstawić jako granicę systemu odwrotnego przestrzeni otrzymanych przez rozważanie w X wszystkich skończonych podtopologii τ.

W ostatnim rozdziale trudno jest wskazać interesujące oryginalne wyniki wymagające bardziej złożonych uzasadnień. Cennym wkładem jest tu wskazanie związków pomiędzy szeregiem konstrukcji topologicznych rozważanych przez innych matematyków.

Wyniki rozprawy dotyczą dość egzotycznej i niezbyt interesującej (z mojego punktu widzenia) tematyki badawczej. Rozprawa ma w bardzo znacznym stopniu charakter przeglądowy, zawiera niewiele oryginalnych, nietrywialnych idei. Zaprezentowany w niej sposób uprawnianie matematyki, gdzie potrzebujemy wprowadzenia kilkudziesięciu definicji i oznaczeń, żeby przedstawić dość proste rozumowanie, nie budzi mojego entuzjazmu. W ciągu kilku lat studiów doktoranckich w IM PAN mgr. Bilski niewątpliwie w bardzo dobrym stopniu opanował tematykę przestrzeni Aleksandrowa, ale nie jestem pewien czy to był właściwie obrany kierunek badań. Mam wrażenie, że pomimo umiejscowienia w najlepszym matematycznym ośrodku badawczym w Polsce, był on w swoich studiach w dużej mierze pozostawiony sam sobie.

Rozumowania prowadzące do uzyskania wyników rozprawy, poza jednym wyjątkiem (wspomniane wyżej tw. 4.21) są raczej dość standardowe i mało złożone technicznie.

W rozprawie pojawiają się ogólnikowe hasła motywujące prowadzenie takich badań poprzez potencjalne zastosowania w różnych obszarach nauki; brak jednak wskazania jakichkolwiek konkretnych zastosowań uzyskanych rezultatów.

Mam również liczne zastrzeżenia co do strony redakcyjnej rozprawy, co także wpływa na obniżenie jej oceny. W pewnych miejscach (np. w dowodzie głownego tw. 4.21) brakowało mi dostatecznej ilości objaśnień, szereg sformułowań nie jest zrozumiałych, a co gorsza, pewne stwierdzenia nie są prawdziwe. Pozwolę sobie wymienić tylko niektóre z napotkanych problemów:

- razi terminologia używana w pracy; autor wskazuje jako główne jej źródło monografie Engelkinga Topologia Ogólna, ale bardzo znacznie od niej odbiega; wydaje się, że zamiast sięgnąć do polskiego wydania tej książki, usiłował samodzielnie tłumaczyć angielskie terminy („waga" zamiast ciężaru przestrzeni topologicznej),
- zwraca uwagę niepoprawne uzasadnienie (str. 16) możliwości rozważania rodziny $\mathcal{R}(X)$ wszystkich (z dokładnością do równoważności) uzwarceń danej przestrzeni Tichonowa X,
- niekompletna definicja reflektora na str. 29 (brak założenia $D' \in \mathfrak{C}$),
- błędne cytowanie Remark 1.2.8 z [7] na str. 47,
- w stwierdzeniu 5.43 na str. 97 pojawia się pojęcie przestrzeni stabilnie zwartej, które jest zdefiniowane dopiero na stronie 120,
- niezbyt zrozumiałe stwierdzenia (np. na str. 100): „jeśli $f : L_1 \to L_2$ jest homomorfizmem ram, gdzie L_1, L_2 są kratami zupełnymi ..." (pojęcie ramy jest węższe niż pojęcie kraty zupełnej),
- niektóre obiekty są używane w kontekście nieobjętym ich definicją, np. funktor $\mathcal{FL}$ jest zdefiniowany dla T_1-przestrzeni, a w stwierdzeniu 5.10 na str. 105 jest używany dla T_0-przestrzeni,
- próba skonstruowania uzwarcenia Čecha-Stone'a dla dowolnej przestrzeni topologicznej, poprzez złożenie funktora Tichonowa z funktorem β (str. 119-120, stwierdzenie 5.40), jest zupełnie niezrozumiała, tą drogą nie można uzyskać jednej z podstawowych własności uzwarcenia - zawierania kopii wyjściowej przestrzeni,
- indeks oznaczeń nie jest kompletny, brakuje w nim także odsyłaczy do miejsc gdzie dane oznaczenie jest objaśnione.

Oprócz powyższych usterek w rozprawie występuje pewna liczba literówek, niektóre z nich, występujące w słowach z języka potocznego rzucają się w oczy już przy pobieżnym przeglądaniu pracy. Jest jasne, że rozprawa została złożona do recenzji przed należytym dopracowaniem i sprawdzeniem strony redakcyjnej. Analizowanie tak przygotowanego tekstu pochłonęło znacznie więcej czasu i wysiłku niż powinno.

Niestety, jest to najsłabsza rozprawa jaką zdarzyło mi się recenzować, rozczarowuje ona jeszcze bardziej, jeśli weźmie się pod uwagę, że jest firmowana przez najlepszy instytut matematyczny w Polsce.

Podsumowując, rozprawę pana mgr. Bilskiego oceniam jako słabą; z dużym wahaniem jestem gotów stwierdzić, że spełnia ona minimalne wymagania stawiane rozprawom doktorskim w Polsce, choć mam wątpliwości czy spełnia ona wymagania jakie, moim zdaniem powinny być stawiane takim rozprawom w czołowych uniwersytetach i instytutach badawczych w kraju. Wnoszę o rozważenie przez komisję doktorską możliwości dopuszczenia jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

W. Marciszewski

Witold Marciszewski